平成 18・19 年度　大学院派遣研修　研修報告会（概要）

金沢大学大学院教育学研究科数学教育専攻
中能登町立鹿西中学校　教諭　奥原彰一郎

# 研修主題　中学校数学における比例指導の改善 －擬不変量の理解に焦点を当てて－

**要約**：本研究は，中学校数学における比例指導についての研究の一端である。本研究の目的は，不変量の理解を視点とした比例の教授実験をデザインすることである。その方法として，「総称的な例」(generic example)に着目する。中学校数学における比例では式 $y=ax$ が重視されており，不変量 $a$ の理解も必要となるが，生徒は式の理解に困難を感じている。本研究では，不変量が徐々に理解されていくような比例の授業をデザインし実施する。その際，総称的な例を不変量の視点で捉えた「擬不変量」という考え方に基づき授業を分析する。生徒の理解には擬不変量にⅠ.未だ意識が向いていないⅡ.徐々に意識が向きつつあるⅢ.既に意識が向いているという３つの水準があると考える。この水準を意識した単元を構成し自ら授業を実践する。その授業データを分析した結果，共通の現実的な問題場面を設定し，特定の定数を系統的に比較することにより擬不変量が発達し，その発達を待って，定義を与えることが生徒の理解を促進するという示唆が得られた。

**キーワード**：比例指導，総称的な例，擬不変量

## Ⅰ　はじめに

中学校数学における比例指導の改善を目指した研究である。現状の課題としては，中学校1年の比例の導入において，式を用いて比例を定義し，式を中心として単元を展開していくことに，生徒が困難を感じている（漢野，2000）ということがあげられる。その理由として第一に，式の扱いが小学校での既習の考え方と異なる点があげられる。小学校では変われば変わるものであった関数が，中学校では，決まれば決まるという一意対応へと考え方が基本的に異なってくるからである。

第二に，式 $y=ax$ の中に２種類の文字が入っていることが考えられる。関数の変わるもの（変数）の中で，唯一変わらないもの（不変量）があるという意味を理解することが，生徒には難しいと思われる。生徒に式 $y=ax$ をただ説明しても分かった気にはならないであろう。何故なら，この段階の生徒は文字に対する抵抗が非常に強いからである。

本研究の目的は，式の中で生徒に特に困難と思われる定数としての不変量の理解に焦点を当て，その指導を改善していく授業をデザインすることである。ともなって変わるものの中で，変わらないものを見出すという不変量（比例定数）の理解は関数の中心を成すものである。しかし，式 $y=ax$ における不変量（比例定数）の理解は徐々に進んでいくことであり，即座に成されるとは思えず，配慮を施した単元構成で授業をデザインする必要があると考える。その方法として，筆者は「総称的な例」（generic　example）というアイデアに着目することが有効ではないかと考える。総称的な例とは，「特定のことを説明しているのだけれども，恰も一般のことを説明しているかのようなもの」である。このことが，生徒が徐々に，数学の概念を理解していく手がかりになると考えるが，総称的な例のままでは，一般的で広すぎる概念であるため，関数の領域に限る場合に概念を絞り，そして「擬不変量」という概念に着目し，これまでの授業の見直しを図り，擬不変量の理解が発達していく段階を考慮した授業をデザインする。単元計画を立てる段階で小中の接続を意識し，式による比例の定義を予め生徒に与えることなしに比例定数が異なるいくつかの関数を考えていく作業を継続していく。その授業を筆者が実際に自身で行うことにより，生徒の様子から思考の内容を捉え，授業を重ねる毎に生徒の思考がどのように変わるかを探り分析する。

## Ⅱ　不変量を検討する理論枠組みの構成

一般に何かを理解する際に，幾つかの水準を考えることが大切である。Balacheff（1991*a*）は命題の一般性に関して，多角形の頂点の個数から対角線の本数を計算する方法を課題とした実験を通し，新しく数学的知識を構成するための方法には，以下の５つの様相があることを述べている。

Ⅰ　素朴な経験主義（Naïve empiricism）
Ⅱ　決定的な実験（The cruicial experiment）
Ⅲ　総称的な例（The generic example）
Ⅳ　思考実験（The thought experiment）
Ⅴ　推論による証明（Proof by reasons）

ここで，推論による証明（Proof by reasons）

が最も一般的である。同じように，不変量の一般的な理解を考える際にも，幾つかの様相を考えていくことが有効だと思われる。実際に，Balacheff の研究で，中間の様相に位置する総称的な例に着目してはどうかと考えた。

総称的な例については，既に先行研究において議論されている。Mason（1984）は総称的な例について，generic 医薬品や“Give me a kleenex”等の日常会話をあげている。後者の場合，kleenex をティッシュの総称的な例として使用している。また，数学の代数の例として，2/3 という分数は具体的であるが，4/6, 6/9 でもあるから 2/3 の一つで他を代表していることを示している。同じように，藤井（2002）も代数については，一般的であるが具体的に考えるという擬変数について，途中段階の重要性を考えている。この擬変数は総称的な例と同じ範疇にある考え方だと思われる。そこで筆者は，総称的な例に視点を置き，変数と不変量とは異なるため，擬変数に対して，「擬不変量」という言葉を使う。筆者は擬不変量について「表記としては具体的な量であるが，表記内容として一般性が意図的に内包されている量」と規定する。筆者はこれまでの総称的な例であるとか，擬変数を参考にしながら,擬不変量の理解に焦点を当てて，授業の実践においてデザインし，具体的に授業の中で，どのように有効であるのか，規範的かつ実証的に研究する。実際の授業に組み込んでみて，生徒の理解の様相を見ながら，擬不変量を分析して検討していることや，概念や意味内容を言うだけでなく，指導を計画し，実証してみることが，本研究の最も重要な点であり，大きな特徴である。

## Ⅲ　調査研究

### (１)調査概要

#### ア．調査対象と教授実験のデザインの原理

調査対象は，筆者が在籍する勤務先の中学校で，中学１年の１クラスを選んだ。本研究では，式を用いて比例を定義して考えていくのではなく，式を前提に具体的なものを課題とし，$a$ が大切だということに徐々に目が向いていくような，しかも，それを抽象的に考えないことを重要視する。

具体的な量を用いた課題を通し，不変量の理解のためには「擬不変量」という理解が重要な役割を演ずるという仮説のもとに授業をデザインする。筆者は生徒が擬不変量を理解していくまでには，以下の３つの水準があると考える。

水準Ⅰ：
　擬不変量に未だ意識が向いていない
水準Ⅱ：
　擬不変量に徐々に意識が向きつつある
水準Ⅲ：
　擬不変量に既に意識が向いている

#### イ．授業計画(総時数10時間)

本授業実践では，前述の教授実験のデザインの原理を踏まえ，10時間からなる指導計画を組み立て，16の主要課題の解決を通し学習を進める。授業計画の指導項目及び，それに対応する課題 NO を以下に示す。

| 時 | 指　導　項　目 | 課題 NO |
|---|---|---|
| ① | ともなって変わる量の変化のしかたを調べること。 | 1，2 |
| ② | 比例定数が異なるともなって変わる量の変化のしかたを調べること。 | 3，4 |
| ③ | 変域が負の数となる比例する量の変化のしかたを調べること。 | 5 |
| ④ | 比例定数が負の数となる比例する量の変化のしかたを調べること。 | 6 |
| ⑤ | 1組の $x$，$y$ の値から比例の式を求めること。 | 7，8 |
| ⑥ | 座標の与えられた点を平面上にとること。 | 9-①，② |
| ⑦ | $y=ax$ のグラフをかくこと。 | 10-①，② |
| ⑧ | 比例のグラフの特徴を調べること。 | 11，12，13 |
| ⑨ | 比例の見方や考え方を利用して具体的な場面の問題を解くこと。 | 14，15 |
| ⑩ | 比例のグラフをよみとって，具体的な場面の問題を解くこと。 | 16 |

この指導計画において，水準Ⅰから水準Ⅲを達成するための課題は，以下のものである。

水準Ⅰ：課題１
水準Ⅱ：課題２～課題６
水準Ⅲ：課題７

#### ウ．分析方法

調査は，授業実践と事前・事後の質問紙調査から構成することにした。授業中の教師の活動や生徒の発話について，映像と音声を録画・録音しプロトコルにおこす。そして生徒の作業により書かれたものを収集し,或いは,事後のインタビューを通した主として，１人の生徒 S を中心とした理解の様相を実際のデータを取りながら分析していく。以下で取り上げる生徒の理解の様相は，生徒の発話と書かれた文章を総合したものになっている。

### (２)授業の実際

授業の実際について，擬不変量の水準の移行に関し課題の工夫，教師の支援，生徒の姿の３つの視点に分けて,以下に分析していく。

〔課題の工夫〕

本授業実践においては，考察対象として共通の場面を設定する。それはエスカレーターの時間と高さの場面である。そして，その場面の条件を変えていくことにより，$a$ に着目させ，擬不変量の考えが芽生えていくような主要課題を設定する。それらの課題は３つの水準に整理すると以下のようになる。

水準Ⅰ
【問題】鹿西中のエスカレーター(A)は 3 秒間に 90cm の高さまで上昇します。6m ある 1 階から 2 階までには，上り始めてから何秒後に到着するでしょうか。
【課題１】変化する量の中から，ともなって変わるものを見つけ変化の様子を調べよう。

| | |
|---|---|
| 水準Ⅱ | 【課題２】身の回りで一方が変わるともう一方も変わるともなって変わる関係を見つけよう。<br>【課題３】鹿西中の最新式のエスカレーター(B)は３秒間に 120cm の高さまで上昇します。6m ある１階から２階までには，上り始めてから何秒後に到着するでしょうか。変化する量の中からともなって変わるものを見つけ変化の様子を調べよう。(A)と(B)を比べてみよう。<br>【課題４】☆秒間に△ cm 上昇するエスカレーターについて調べてみよう。<br>【課題５】１階を基準にして $x$ 秒後にはエスカレーターの高さが $y$cm 上昇するとします。鹿西中が只今建設している地下駐車場のある地下6mから地上6mの職員室まで動くエスカレーターの時間と高さの関係を調べてみよう。<br>【課題６】１階を基準にして $x$ 秒後にはエスカレーターの高さが $y$cm 上昇するとします。鹿西中の来年度，着工予定の地上6mの2階の職員室から地下6mにある地下1階の駐車場まで下降する下りのエスカレーターの時間と高さの関係を調べてみよう。 |
| 水準Ⅲ | 【課題７】１年１組の担任の上野先生の家のエスカレーターは 20 秒で２階に到着します。エスカレーターの上る高さは時間に比例します。このエスカレーターは５秒間に，２ｍ上るとしたとき，① 18 秒後には，エスカレーターは何ｍの高さにいますか。② $y$ を $x$ の式で表しなさい。 |

・【課題 6】まで考察し，$a$ について十分に議論し理解を深めた後，ここで初めて，比例の定義を式 $y=ax$ として表すことが生徒に知らされる。
・【課題 7】までの単元の入り口の丁寧な入り方が，従前とは大きく異なり，不変量の理解にとって，良い影響をもたらしているのではないかと考えられる。

〔教師の支援〕

以下のような表を螺旋的に増やすことにより，生徒の意識が擬不変量に徐々に向いていくよう支援する。

【課題 1】

| $x$ | $y$ | 決まった数 | 式 |
|---|---|---|---|
| 3 | 90 | 30 | $y=30x$ |

【課題 3】

| $x$ | $y$ | 決まった数 | 式 |
|---|---|---|---|
| 3 | 90 | 30 | $y=30x$ |
| 3 | 120 | 40 | $y=40x$ |

↓

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

【課題 7】

| $x$ | $y$ | 決まった数 | 式 |
|---|---|---|---|
| 3 | 90 | 30 | $y=30x$ |
| 3 | 120 | 40 | $y=40x$ |
| 1 | 20 | 20 | $y=20x$ |
| 4 | −200 | −50 | $y=-50x$ |
| 5 | 2 | 0.4 | $y=0.4x$ |

〔生徒の姿〕

水準Ⅰ．擬不変量に未だ意識が向いていない

・【課題 1】では，生徒はまさに具体的なことでしか考えられない段階であり，30 についてのみ，生徒は色々と説明している。

教 師：表から分かることを分析してみて下さい。
生徒 S：１秒増えるたびに 30 ㎝ずつふえている。高さは 30 の倍数となっている。

ここでは，3 秒で 90 ㎝上昇することしかとりあげていないため，こういった生徒の反応はある意味当然で，自然であると思われる。“30 についてのみ”ということが，一番のポイントであり，まさに具体的な部分だけにしか, 目が向いていないという様子が伺える。生徒は高さ○，時間□の値には，色々な数が入るということが分かってきている。つまり，変わっていくものがあるという変量の理解が，ある程度進んできており，これは不変量の理解より先に発達していくと思われる。

この場面では Balacheff の検討する素朴な経験主義の様相に対応するのかもしれない。

水準Ⅱ．擬不変量に徐々に意識が向きつつある

・【課題 3】では，$y=40x$ について 1 分あたりに何㎝高くなる等，その仕方は個々により異なるが，恰も $y=30x$ の性質をコピーペーストするかのように, 説明することができている。

教 師：ともなって変わる２つの量をみつけ，変化の様子を調べましょう。また，(A)と(B)の同じところと違うところを調べてみましょう。
生徒 S：時間を $x$，高さを $y$ とすると $y \div x=40$。40 － 30 で(A)のエスカレーターより(B)のエスカレーターのほうが，1 秒間に 10cm 多く上り，(B)のほうが 5 秒速くつく。とうたつ点が一緒。

生徒は 30 と 40 について，まだ定義のように説明することは難しい段階であるが，複数の具体的な違う場面, つまりまだ一般性がなく，具体であるが“前にもあった”と気が付く場面である。また 1 秒間に上昇する高さが異なり，30 より 40 の方が速いと気付いている。異なる速さを扱うにつれ, $y/x$ ＝(決まった数)として，式で表すことができるものに意識が向けられ，決まった数が課題の中心に据えられ授業が展開していった。“特定な 30 と特定な 40 とを比べる”ことから，決まった数量だけど，その決まった数量自身を比べることによりどこに着目していけばいいのかという，擬不変量が現れてくるきっかけが，生徒に与えられている場面であると考えられる。

・【課題 4】では，生徒は思い思いの速さのエスカレーターを想像し $x$, $y$ を考えている。

〔生徒 S の作った表〕

| ☆ | △ | 決まった数 |
|---|---|---|
| 5 | 30cm | 6cm |
| 5 | 500000cm | 100000cm |

教 師：決まった数ってなっとるげんけど，いろいろあるげんけど，どう思いや？
生徒 S：えっと…それぞれ，例えばいろいろな会社にあるエスカレーターみたいに，あちこちでいろんな速さで違うんかもしれん。全体では決まっているわけではないんやと思う。
教 師：じゃあ，何がきてもいいがんかなあ？

生徒 S：△を☆でわりきれる数かな…？

・【課題 5】では，負の数にまで変域を拡張していく場面である。

教　師：なんか分かることないかな？

生徒 S：1 秒で 20cm 上ることが決まった数。そんでプラスの方もマイナスの方も決まった数の求め方は同じで，決まった数がいろいろあるのは様々な会社のエスカレーターのようなもんかな。決まった数があるのが比例かな？いつもいっしょやから。

生徒は地下のことを頭の中にイメージしながら，エスカレーターについて考えているようで，時間と高さについては，正の数と同様に考えれると捉えているようである。

・【課題 6】では，決まった数が負に拡張されていく場面である。

教　師：じゃあここで分かることってなんやろ？

生徒 S：$x$ が 2 倍，3 倍…となると $y$ も 2 倍，3 倍…となる。決まった数は−50 で，$y/x=-50$。$y \div x$ で決まった数がでてくるのが比例なんかな？

教　師：決まった数が−50 でマイナスやけど大丈夫なんか？

生徒 S：プラスの逆やからエスカレーターで下がると考えるとまあ一応納得できるんかなあ…。

この生徒 S は，比例定数が負であっても下りのエスカレーターをイメージしながら，擬不変量として，統合されつつある可能性があると考えられる。

<u>水準Ⅲ．擬不変量に既に意識が向いている</u>

・【課題 7】では，生徒は擬不変量として捉えている段階であると考える。つまり総称的な例のように分かっているのだけど，考えている部分及び説明する部分が具体的つまり一般化の直前である。生徒 S は，ごく普通に式 $y=ax$ が使えるような段階にまで，擬不変量の理解の様相が進んでいると考えられる。

生徒 S：２＝５ $a$　　$a=0.4$　　$y=0.4x$

式で表すことを必要とするのだけれども，生徒が実感を持って，そう思えるかが大切であり，擬不変量の理解が進むことで，後の一般的な理解につながっていけると考える。

生徒 M：決まった数やけどいろんな数が入ってもよくって，それぞれのエスカレーターの場合とかそれぞれの状況に応じて決まっとるんやろ。

という授業中の生徒 M の発言に多数の生徒が頷いており，生徒達は，頭の中にエスカレーターをイメージしながら擬不変量に意識が向いているといった様相が伺える。

## Ⅳ　議論

以上の授業において，実践者として，筆者の教職経験から従前の指導と比較すると，大きな手応えを感じとった。

その理由として第一に，エスカレーターという共通の現実的な場面設定を何時間にもわたってとりあげ，その一連の授業において，上り下りや，それぞれの速さを変えてみることが, 功を奏したのではないかと考えられる。

第二に，各授業毎に特定のエスカレーターの場面を扱い，前時までの特定の定数を系統的に比較することで，真の概念に至る以前の擬概念，つまりここでは擬不変量であるが，それが生徒の思考に生まれたのではないかと考えられる。より現実的には，工夫した表を徐々に付け加え，個々の場面を見比べ，比較することにより共通性に目が向きやすくなるように配慮を施したことが，擬不変量の発達において，役立ったのではないかと考えられる。

第三に，個々の場面毎の具体的な定数を系統的に比較することによる擬不変量の発達を待って，比例の定義の式を与えたことが，生徒の理解を促進したことにつながったのではないかと考えられる。

## Ⅴ　まとめと今後の課題

本稿では，中学校数学における比例指導の改善案を提示してきた。生徒が擬不変量を理解していくには３つの水準があると考え，その水準Ⅰから水準Ⅲの流れを意識しながら，教授実験のデザインの段階で，擬不変量の考え方が，生徒のなかで育っていくような課題による単元を構成し，自ら授業を実践した。その授業データを分析した結果，共通の現実的な問題場面を設定し，特定の定数を系統的に比較することにより擬不変量が発達するのではないかと考えられる。そして，その擬不変量の発達を待って，比例の定義の式を与えることが生徒の理解を促進するのではないかという示唆が得られた。

しかし，中１の指導で比例定数 $a$ の理解をどこまで目指せば良いのかが，問題となる。比例だけで不変量が全て理解されるわけではないと考えられる。不変量は中２の一次関数，二乗に比例する $y=ax^2$ で変化の割合，高校では任意定数となる。不変量の理解は比例に留まらず，一次関数など長い期間にわたって形成されると思われ，比例における不変量の発達について，一次関数も含めた関数指導全体において，その関係性を考察していくことが必要ではないかと考える。

## 引用・参考文献

Balacheff, N. (1991a).Treatment of refutations：Aspect of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In von Glasersfeld（ed.）, *Radical Constructivism in Mathematics Education*（pp.89-110）. Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N.（1991b）. Aspect of proof in pupil's practice of school mathematics. In D. Pimm（ed.）, *Mathematics, teachers and children*（pp.216-236）. The Open University Press.

Mason, J. (1984). Generic Examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.