

研究主題

高等学校のグラフ力育成のための数学的モデル化過程の授業効果  
～観覧車の動きを題材とした三角関数の学習～

要約

本研究では生徒がグラフを用いて関数の問題解決をはかる力(グラフ力)を伸ばすことと、関数の知識が実生活にも役立つことを生徒達に実感させ、関数学習に取り組む意識を高めることを目指す。グラフ力を育成するには生徒が現実問題に取り組み、その解決のためにグラフを用いるような数学的モデル化過程を踏む授業が有効と考えた。そのため、数学的モデル化過程を踏んで生徒がグラフを理解し、道具として使いこなしていく過程を段階に分けた(グラフ力の段階)。それをもとにして授業を設計し、実践して、グラフ力の段階の変化を観察し、グラフ力育成の効果を分析した。これらの結果、効果として、関数を具体的な現実事象の量の変化として捉えられるようになったこと、関数の概念を学ぶ場面での生徒の思考活動の活性化等をあげた。

キーワード: グラフ力、数学的モデル化過程、関数

I はじめに

高等学校の関数学習において、生徒はグラフを十分に使いこなしていない。関数の変化の特徴を掴む時は、グラフの視覚的で観察しやすいという利点を生かしたい。そこで、生徒が関数学習の場面でグラフを使って探究活動を行う力を育成する必要があると考えた。

グラフを使う力を伸ばすには、グラフが具体的な量の変化を表していること、量の変化の特徴を探る時にグラフが有益な道具になることを実感させることが重要である。そのために関数学習の場面で、量の変化を探る文脈の現実問題から入る数学的モデル化過程を取り入れ、グラフを使って量の変化を探る体験をさせることが効果的と考えた。

II グラフ力の定義

グラフ力は関数を用いた問題解決の場で育つと考え、入力場面と出力場面の2つの場面に分けて以下のように定義した。

**入力場面:** 量の変化を探る状況下で、グラフを用いて関数の特徴を探り、グラフを道具として使うことのできる形で習得する力。

**出力場面:** 習得したことを問題の状況に応じて使い分ける力。関数の特徴を活かし、グラフを使って数学的処理を施し、問題解決する力。

本研究は実際の事象の変化を表すものとして関数を導入し、事象の変化を探る道具としてグラフを導入する。そのため入力場面を重視する。

III 研究の目的と方法

(1) 研究の目的

三角関数の単元で、グラフ力育成を意図した数学的モデル化過程の流れを組む授業を設計して、実践

し、その効果を検討する。

(2) 研究の方法

グラフ力の育成に効果的な枠組みを検討するために、数学的モデル化過程の先行研究にあたり、分析する。グラフ力の発達する段階の枠組みを、入力場面と出力場面でそれぞれ作成する。そしてグラフ力育成を意図した授業を設計・実践し、生徒のグラフ力の発達段階を特定し、考察する。以上を踏まえ、授業の効果を考察する。

IV 先行研究との位置付け

(1) 数学的モデル化過程

本研究では、数学的モデル化過程の捉え方として三輪(1983)の数学的モデル化過程の図を基本として考えた。

図1 数学的モデル化過程 三輪(1983)

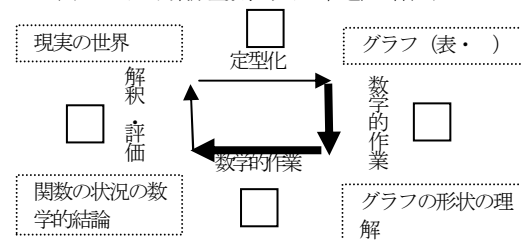
(三輪 1983「数学教育におけるモデル化についての考察」)



グラフ力発達には数学的作業が関わると考える。

(2) グラフ力育成型数学的モデル化過程

図2 グラフ力育成型数学的モデル化過程の枠組み



三輪の数学的モデル化過程を関数学習の場面に限り、グラフ力の発達状況を見るため、図2のように数学

的作業の 分を した。以下このグラフ力育成のための数学的モデル化過程をグラフ力育成型数学的モデル化過程とする。

ここで数学的作業を している理 は、グラフ力の発達段階に以下の2つが まれるからである。

**数学的作業**

2変数の関 をグラフに表す。  
グラフの形の特徴を掴む。

**数学的作業**

グラフの形の特徴から2変数の変化の特徴を考察し、 する。

グラフを使いこなすためには、 き表せる けでなく、グラフの形の特徴から関数の変化の特徴と み えができればいけない。関数の特徴を使い い形で するには、グラフの形の特徴と変化の特徴の関 を理解し、現実の状況に し、する活動が必要である。 して な 分の を り し、そのために や表やグラフを使うことによってグラフ力が育つと考える。

(3) グラフ力育成型数学的モデル化過程の段階

グラフ力育成型数学的モデル化過程の図2の段階は、具体的には以下の になる。

**入力場面**

関数の概念を現実問題の解決を して理解し、習得する。問題解決の体験を生かして がグラフの知識を 分た の使いよい形に して習得する。

表1 グラフ力育成型数学的モデル化過程の段階(入力場面)

段階	(定型化) 現実の問題の状況を分析する。2変数は かをし 立変数 変数を意識する。
段階	(グラフの形の特徴を掴む) 2変数の関 をグラフに表す。 点を できる。 点の からグラフの概形を できる。 グラフの形から図形的な特徴を掴む。
段階	(形の特徴から変化の特徴の ) グラフを観察し、グラフの形の特徴を分析し、2変数の変化の特徴として する。
段階	(解) 関数の変化の特徴を現実問題こって する。

**出力場面**

関数の特徴を問題解決に使う。 で得た数学的知識を定 発 させるため、また現実問題で使う力を うことが目的である。

表2 グラフ力育成型数学的モデル化過程の段階(出力場面)

段階	(定型化) 現実問題の状況を する。
段階	(グラフの作成と処理) 探る必要のある量の変化を表すグラフを作る。グラフの知識を使う きか検 し、視覚的に考察し、処理を行う。
段階	(グラフの処理の結果から変化の状況の ) グラフでの処理の結果を量の変化の状況 み える。
段階	(解) 現実状況こり結果を する。

**V 授業の実際と分析**

(1) 授業計

はグラフ力育成型数学的モデル化過程のう 入力場面を単元の指導計 に入れた。三角関数の単元を ん 理 は生徒の きが く、 を要すると 感じていたからである。題 の観 については の教科 のContemporary Mathematics in Context (1998)を 考にした。


時		
1	題1観 の する角度を める。	
2	変動する角度(等 動)、角度の	
	題2観 の問題:高さの変化を る。 観 の高さの変化を るためグラフに 目し、グラフを作成。グラフの形を観察し、そこから変化の特徴をつくる。い した特徴を現象こあてはめて する。	入力場面1
	題 1観 の問題 観 の高さを めよう。 観 の高さを sin の で表し、表を作る作業。観 の につ形で三角 を する。	入力場面2
9	表からグラフを作る。	
10	題 2 題2のグラフと 題 1のグラフを	
11	し、グラフの形の特徴から変化の特徴を する。	
12	題 問観 の ん からの高さにしたら うなる 問 観 の を1 にしたら うなる 観 の状況から sin のグラフを導く	
13	題 考察) sin のグラフを し く く。	知識の洗練
14	問) sin y 2sin でのグラフの変わり方	
15	問) y=sin θ →y=sin θ +1でのグラフの変わり方 観 の状況とグラフの 大 平行 動 動を関 けて考察	
17	題 問 の角度の の を、グラフを使って めよ。	
18	123 23	
19	問 の を たす角度の を めよ。た しは0	
20	360 とする。三角関数表を使ってよ いよ。 sin 0.3090の時の sin 0.3090の時の の 三角関数のグラフの利用 角度から三角 を める、三角方程 、 等	
	グラフ を使った授業 10 12時、14時、15時	

(2) 授業の実際と分析

ここでは、 面の 上グラフ力育成型数学的モデル化過程の 題2 においてのグラフ力の変 について る。

題2 9 にフ ラ で観 に りました。  
観 デ ;高さ50m 25m 1 する時 10分  
(1)観覧車の高さはどのように変化しますか?  
観覧車からの景色を見ると高さの変わり方に違いはあるかな…  
(2)実際に速さを比べてみよう!  
観覧車のビデオをみて、A、B、Cの地点を通過する時間を調べよう。  
同じ速さで昇っているかな?  
(3)エスカレーターでも調べてみよう!

題 1 乗っている観覧車は何メートルの高さなのか知りたい!  
Aさんが観覧車に乗ることにしました。乗ってから5分後に故障で観覧車が止まってしまいました。  
観覧車データ:高さ45m 20m  
り場の高さ 5m 1 する時 12分  
(1)その時の観覧車の位置を点Pとします。  
点Pを上のに書き込みましょう。



②その時の観覧車の高さを表す線分を図に線で書きこみなさい。

**題**  $\sin$  のグラフをしくこう。  
授業の流れとグラフ力の変

**題2** 生徒達は観の高さの変化が一定でないことにき、の高さのグラフ( )と するため、図1のように観 をと なして し、グラフを作成し、観察を行った。くの生徒は生徒 SR(図3)のように 状や れと いった形状を て に いていった。グラフの観察の場面では とん の生徒が らかの形の特徴を 入したが、グラフの形の特徴から変化の特徴 なかなか発 しない。教 が 導しようと 発問するが、 が「 」な の単 であり、変化を捉える表現や現実の状況 しない。

図3 題2 生徒の

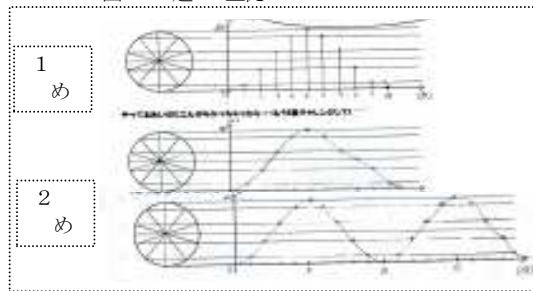
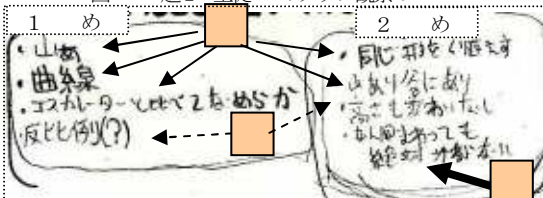


図 題2 生徒のグラフ観察の



ここでは とん の生徒がグラフを作成し、形状を観察して特徴を したので、概 の生徒が 段階に達したと考える。しかし、それ以上の段階の 行が に まない。グラフの状況と現象の状況の行きに れな生徒には、 段階から 段階 段階に達するための が必要である。生徒 SR(図4)は、グラフの特徴を変化の特徴に重 て考えたが、 な表現でない。数学世界と現実世界を に行き するためには、このような体験を 度も り す必要がある。

**題**  $\sin$  を使って観の高さをめ、表からグラフを作成、その、 題2と題の2つの観のグラフを する考察から、生徒の 段階から 段階の 行をめようと計した。に

は まなかったが、 題2より 段階の 行が ん。生徒は にグラフと観の世界を歩き できるようになった。 題 では変化の特徴を表す生徒の (図5 生徒 SR)が具体的表現に変化した。

生徒のあげた形の特徴について、な その形になったのか発問し、観の動きで考察させた。生徒達は観の動きを しながら変化の特徴を掴もうとした。生徒SRは 題2(図4)で にグラフの概形を掴んでいた。に 題 (図5)で具体的表現ができるようになり、グラフの 大が観の上の時であることを し、 と1の時を 結 つけて考えるようになった。

一方、生徒SAは 題2(図6)では 段階まで達し、 段階の思考も 生えた。しかし、 題 (図7)では観の状況から意識が れ、グラフの形状にとらわれてしまった。分と cmを して用いるな、グラフが高さと時 の間を表していることを考えていない 段階の状 にる場面もみられた。このような生徒には、グラフを現実の状況の量の変化として考えられるよう する が必要である。

図 題 生徒のグラフ観察の

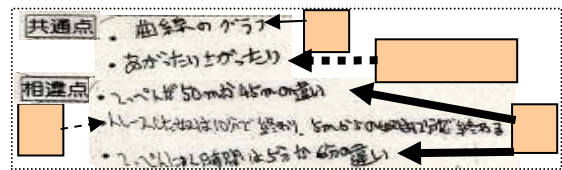


図 題2における生徒のグラフ観察の

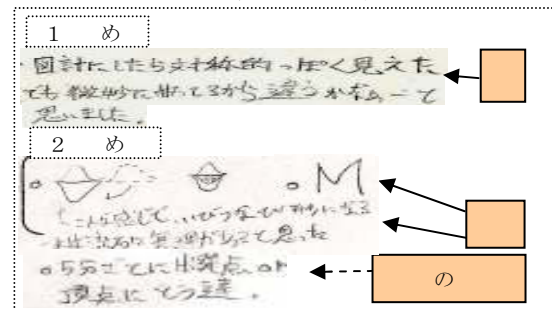
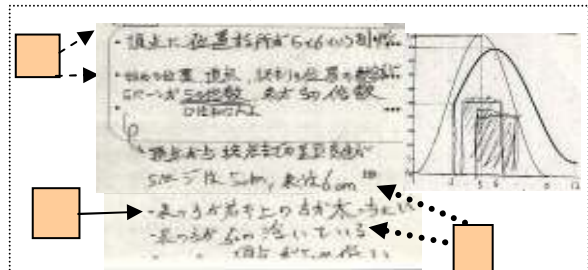


図 題 における生徒のグラフ観察の



グラフの形の特徴の理を現象で考えることは形の特徴を変化の特徴に みえるきっかけになった。表3より生徒SRが 段階に むために観の状況を がかりにしており、 段階と 段階が 時に 行することがわかる。 の生徒にもグラフ

と観 の動きを行き して変化の特徴を かめる 思考活動がみられ、 に観 の動きに した具体的な も現れた。生徒にとってグラフの形から 変化の特徴を み取することは しい。現実の の状 況で考えることが、段階の 行を める けになる ことがわかる。

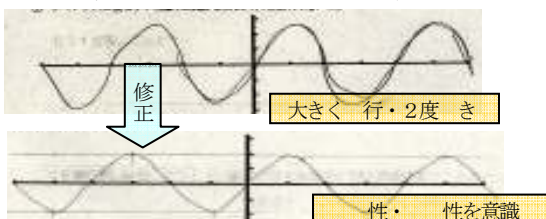
表3 題2、題3における生徒SRの思考活動

		段階
課題2	山	形として意識する(段階)
	高さは変わらない	変化として意識する(段階)
	しても高さは変わらない	観 の状況で かめる(段階)
課題3	てっ んが50mか45mの い	観 の状況で かめる(段階) 高さの 大 の時が観 の 上の時であることを
		関数の 大 を意識する(段階)
	てっ んにく時は5分か6分の い	観 の状況で かめる(段階) 大 をとる時の時 を意識する(段階)

題 題 で、生徒は  $\sin$  が 1の観 の ん からの高さを表すことを学 、そのグラフをグラフ で表した。題 ではグラフ から し取った  $\sin$  のグラフを観 の状況にあわせて修 していく。 の授業では、グラフを く際、 性や 性を意識しない生徒が く、修 することが に まなかつた。しかし は生徒 がグラフを かめ、観 の状況に し、修 していった。以下は  $\sin$  のグラフを修 する場面の授業の ルである。

- 13050T:.....( )...じ高さがいって。これ、を ってるかわかりますか ここにお山とか とかいくつか出て いますよ これ(グラフの山の をす)、じ になってい ますか
- 13051SG: んなん に いたらならなくない
- 13052T:うん、 に い ったら観 の高さにならないよ、 ってたさあ、ここの(山の )が変わるってことはく動 くととき く動くときがあるわけで、 いするといふ...
- 13053SG:定 使って かななくっ いけなかつた
- 13054T:はい、ここの...目 りのどこ に を いてあるで しょう これ、 らなくてはいかんというか、の目 りに が るか...山のてっ んとか、 を う するとか をつけて いてということなんです、そこの目 りのどこ を ると、山の が一 になるよ。

図8 生徒SGの 題 の の変化



ルより、生徒SGは グラフを く時 は、 いたい たような形を けばいいと思っ ていることがわかる。教 が、グラフが しくないこと

を観 の状況で したことで、生徒SGがグラ フの の必要を 覚した。その 図8のように生 徒SGは 的にグラフを修 していく。生徒のグ ラフ力は現実の世界と数学の世界を行き しながら 定 していった。

### グラフ力育成 数学的モデル化過程の効果

#### 授業の効果

関数を具体的な現実事象の量の変化として捉える ことができた。その結果、グラフを具体的な量の変 化を表すものと捉えることができた。題2では、 現実の観 の動きを することがグラフの 概形を捉えることの けとなった。2つのグラフを する場面では、観 の が、グラフの 形の特徴から量の変化の特徴 み えのきっかけ となった。変化の特徴の は に具体的表現に 変わり、グラフの形の特徴は関数の特徴と結 ついた。

また関数の状況と現実事象の量の状況を行き す ることで、関数の概念を学ぶ場面での生徒の思考活 動が活発になった。グラフを使って変化を探る体験 を して、グラフが有益な道具であることが意識さ れた。生徒は 分た の作ったグラフを 的に観 の現象に して、修 することができた。

#### 枠組みの成果 検討す き点

グラフ力の枠組みによって、生徒のグラフ力の 行のう 段階から 段階 の変化が であるこ と、また 行を すのに、具体的な現実の量の状況 で考えることが ての1つとなることがわかつた。

#### の 題

授業の として、授業計 の時 分と の が必要である。さらにグラフ力を る の検 討が必要である。グラフ力の段階の 行をさらに しく て、行が である 分を特定したい。 の計 として は実践できなかつたが、出 力場面においても現実の問題の解決から入る数学的 モデル化過程を踏む授業を計 し、効果を りたい。 また、 の関数の学習場面でもこの枠組みで授業を 計 し、実践していきたい。

#### 用 考文

A.F.Coxford (1998)「Contemporary Mathematics in Context Course2 PartB」EVERYDAY LEARNING,pp.431 445.

立教育 研究 (2004) 生きるための知識と OECD 生 徒の学習 達度 (PISA)2003 年 際結果報告 うせい pp.94 100.

立教育 研究 (2007) PISA2006 年 の枠組み OECD 生徒の学習 達度 うせい pp.91 92.

三輪辰郎(1983)「数学教育におけるモデル化についての一考察」 数学教育研究 2 pp.117 125.

一(2001)「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」 本数学教育学 83 11 pp.2 12.