平成２０・２１年度　大学院派遣研修　研修報告（概要）

金沢大学大学院教育学研究科数学教育専攻
野々市町立野々市中学校　教諭　織田勇一

研究主題　中学校数学科における確率指導の改善
～数学的確率と統計的確率の相互作用に着目して～

要約：　現状の確率指導は数学的確率の求め方に重点を置く傾向がある。確率概念の形成には数学的確率と統計的確率，更にそれらの関連について理解を深めることが重要である。本研究の目的は，確率概念の形成過程における数学的確率と統計的確率の相互作用の過程(数学的確率と統計的確率の理解の深まりを相互に支え合う過程)を明らかにし，確率指導の改善を提案することである。そこで，２種類の確率の相互作用に着目した確率概念の形成過程を仮説し，単元を通して数学的確率と試行結果の両面から事象の起こりやすさを考察する授業を設計，実践し，生徒の思考を分析した。

その結果，学習初期では生徒に数学的確率と試行結果との矛盾に対する戸惑いや混乱が見られ，相互作用は明確ではなかった。しかし，学習が進むにつれ，生徒が２種類の確率の相互作用に基づき確率の理解を深めていく過程が見られ，指導改善の実践的示唆として「２種類の確率の相互作用に基づく確率概念の形成を図る学習指導を考える際には，学習初期から数学的確率と現実の試行結果の両面から起こりやすさを考察する活動を行い，この活動を積み重ねることが重要である」等が得られた。

キーワード：数学的確率，統計的確率，相互作用

Ⅰ　はじめに

(1) 問題の所在

平成 19 年度全国学力・学習状況調査で，確率の意味理解や捉え方について生徒に課題が見られた。現在，確率学習は中２で開始され，数学的確率と統計的確率が扱われる。確率概念の形成には，これら２種類の確率それぞれと両者の関連について理解を深めることが重要である。しかし，現状は試行結果から相対度数を求め統計的確率を導入し，確率を求める必然性に乏しい文脈で数学的確率を求める学習を重視する傾向がある。数学的確率と統計的確率の両面から事象の起こりやすさを考察したり，両者の関連を考察する活動も少ない。このことが，確率を生徒が確定的なものとして捉えたり，統計的確率概念の形成の妨げの原因に繋がっていると考えられる。

(2) 研究の目的と方法

確率の理解が深まる過程においては，数学的確率，統計的確率それぞれの理解が単独で深まることもあれば，理解の深まりを相互に支え合うこと（相互作用）もあると考える。本研究の目的は，「確率概念の形成過程における数学的確率と統計的確率の相互作用の過程を明らかにし，現状の確率指導の改善を提案する」ことである。

そのために，以下の方法をとる。

①確率概念の発達の様相・理解の実態等の先行研究の検討に基づき，数学的確率と統計的確率の相互作用に着目した確率概念の形成過程の仮説モデルを作成する。

②仮説モデルに基づく，単元計画と数学的確率と試行結果の両面から事象の起こりやすさを考察する授業を設計し，実践する。

③実践の分析から，確率概念の形成過程における２種類の確率の相互作用の過程を明らかにし，②の授業の有効性を検証する。

Ⅱ　確率分野における水準

福間，礒田(2003)は「確率の学習において生徒の思考の発達の様相を踏まえた学習過程を考える必要がある。」と述べ，H.Freudenthal を参考にしつつ，確率分野の学習過程の水準を作成し，その妥当性を示している。

中学校までに該当する水準の要点を示す。

●第０水準：直観的確率
事象の起こりうる場合を自ら予測。自分の考えや経験から確率を見つけ出す。場合を取りつくす意識なし。
●第１水準：割合としての確率

数の大小を用い起こりやすさを判断。統計的確率と数学的確率との区別はない。(数学的確率)簡単な場合を取りつくし確率を求める。同様に確からしいことの前提はあいまい。(統計的確率)標本における割合として確率を求める。大数の法則は問題にしない。
●第２水準：確からしさとしての確率
数学的確率と統計的確率は区別。(数学的確率)定式化された算法としての確率を順列・組合せの計算により考察。積や和の法則を用い順列・組合せを考える。(統計的確率)極限的発想としての確率。確率を割合で表し，試行回数を増やすとある確率に近づくことが分かる。

この水準説明は，確率概念の形成を図る単元計画や授業を考える上で有効な知見である。しかし，数学的確率の１水準と２水準の間にやや開きがあり，修正する必要がある。

Ⅲ　単元計画と授業設計について

先行研究の検討から指導改善のため，次の４つの原理を設定した。

- 確率概念の認識における水準の移行を図る単元計画を設定する
- 子どもの確率に関する思考の発達の様相を踏まえた学習活動を設定する
- 数学的確率と統計的確率（試行結果）の両面から確率を考察する活動を設定する
- 確率の考えを活用しようとする態度を育むような問題（文脈）を提示する

この原理に基づき，２種類の確率の相互作用に着目した確率概念の形成過程を仮説し，単元の計画・授業設計を行った。その際，生徒の素朴な経験や直感から学習を始め，そして，数学的確率と試行結果の両面から考察する活動を積み重ね(12 時間中 6 時間)，確からしさとしての確率概念の形成と数学的及び統計的確率の概念分化を，徐々に図るよう留意した。また，問題の文脈は，現実味のある文脈を用いている，Mathematics in Context. Take a Chance（MIC,2006）を参考にした。

Ⅳ　授業の実際と生徒の活動の分析

授業は 2008 年 10 月下旬から，筆者の勤務する公立中学２年生の１クラス 35 名を対象に実施した。本稿では，第１時，７時，11 時を取り上げる。なお，プロトコルでGM等のイニシャルは特定生徒，Sは不特定生徒，Ssは複数の不特定生徒，Tは教師を表す。

(1) 第１時の活動と分析

第１時では，さいころの公平さを，起こりうる場合の数から捉えた確率(数学的確率)と実際の試行での事象の起こる頻度から捉えた確率の両面から考察する。

まず，次の問題を生徒に提示し，太郎の方法の公平さと，公平に決める方法を考えた。

問題　太郎と二郎は兄弟です。1台しかないコンピュータゲームをどちらが使うか言い争いをしていた。その時，兄の太郎は「このサイコロを1回投げて，1か2の目がでたら二郎，それ以外ならおれ（太郎）が使うことにしよう」と言い出した。

生徒たちは以下のように考えた。

●生徒の発言（ゴシックは筆者による強調）

GM：不公平。二郎は1と2の2つの面が，なんていうが，2つ分のでる面しかもらってないけど，太郎はそれ以外の4つが全部太郎のもんやから**4つと2つだったら絶対4つの方が出る確率は多い。**T：公平に解決するには，どんな方法をとったらよいのかな？ NS：1と2と3なら二郎，4と5と6が太郎。NS：**面の数が一緒なら出る確率も一緒。**HM：奇数と偶数にする。

殆どの生徒が起こりうる場合の個数に着目し確率を捉えた。生徒の数学的確率概念の基盤は生活経験等により既に形成されている。面の個数を等しくすると公平という考えは，起こりうる場合すべてが同様に確からしいことを前提としている。しかし，NSの「面の数が一緒なら，出る確率も一緒。」から，この前提への生徒の意識は低いといえる。

その後，次の問題を用い，理屈で捉えた公平さをさいころを投げる個人実験（50 回）の結果から考察する。

問題　実験結果を参考にして考えよう。１，２，３なら太郎，４，５，６なら二郎という方法は公平だと思いますか？ どうしてそう思う。

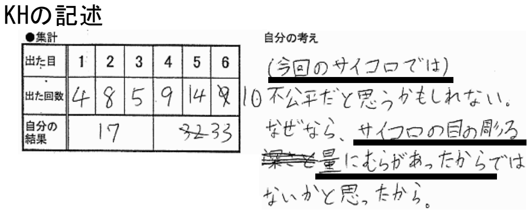
生徒の様子と考え（**図1**）を示す。

●考察中の生徒の発言のプロトコル

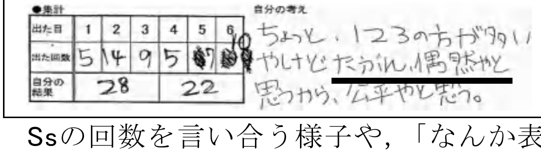
Ss：(**生徒は互いに回数を言い合う**)22と28。**なんか表多くない。**1，2，3が24，4，5，6が26。いっしょ。私，23と27。**それぐらい（の差）よくない。**

●図１　ワークシートの記述（50回の個人試行）

KHの記述



GMの記述



Ssの回数を言い合う様子や，「なんか表多くない」から，試行結果と起こりうる場合か

ら捉えた確率との矛盾に戸惑う様子が伺える。理屈と現実との矛盾を，KHはさいころに不備がなかったか，GMは今回に限る偶然というような理由づけをし，数学的確率と試行結果との矛盾をうまく説明できていない。つまり，確率学習の初期は，数学的確率と統計的確率が理解の深まりを支え合う相互作用は明確ではなく，生徒は数学的確率と試行結果との矛盾に戸惑い，混乱するといえる。

(2) 第７時の活動と分析

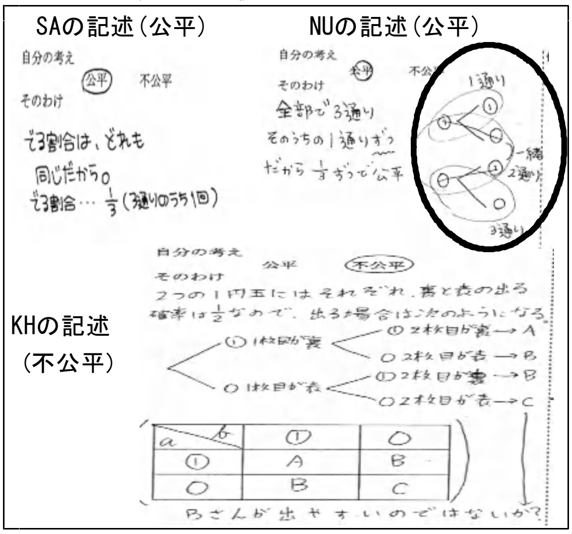
７時では，２枚の１円玉を投げる事象で同様に確からしい根元事象を捉えることを意図し，観察されうる結果から捉えた確率と試行結果とを比較考察する活動を行う。

まず，次の問題(抜粋)を生徒に提示した。

問題　太郎さんは･･(中略)･･3人の中から公平に1人を選ばなければいけません。学校で確率を勉強した太郎さんは，2枚の1円玉を1回投げ，①①ならA，①〇ならB，〇〇ならCにチケットあげることにすれば公平に選ぶことができると考えました。太郎さんの方法は公平な決め方ですか。

生徒ワークシートの記述を示す。

●図２　代表的な生徒の記述



公平の生徒は 23 名見られ，その殆どはSAのように(図2)，起こりうる場合を３通りと考え３通りが同様に確からしいという前提で確率を捉えた。NUは４通りを書き上げた(図2樹形図は未習)が，①〇と〇①は一緒と記述し，根元事象を捉えていない。

不公平の生徒は５名見られ，根元事象を正確に捉えたのはKH１名(図2)である。授業では，KHが樹形図を板書し説明したが，生徒の多くは納得できなかった(以下の発言参照)。

GM:でもー，表裏と裏表は一緒じゃないけ。GM:意味わからん。GM:だから，1回だけしか投げんから変わらん。(裏表と表裏は変わらん)

そこで，実際に試行を行い公平の理由づけを考察した。２人ペアで 50 回試行し，17 ペアの合計 850 回の試行結果(図3 SAの記述参照)を用いた。生徒は結果から３通りの出やすさの違いを捉え，公平ではないことは容易に理解したが，起こりうる場合を４通りとする捉えはできなかった。

そこで，次のように導いた。

●授業のプロトコル

T:この割合の数をみて何か気がつくことない？ KM:**だいたい2倍。**T:どこが？ KM:**真ん中(①〇)。**T:**ちょうどじゃないけど，ほぼ2倍になってますよね。850回の実験ですからきちっと，ちょうど2倍ってことはまあないでしょう。でも，ほぼ2倍になってます。**これ，なんで2倍にるの？ Ss: **2通りあるから。･･出る場合が2通りあるから。**T:UKさん，その2通りってどれ？ UK:さっき，**KKさんがいった表裏と裏表。**

生徒たちはKMの発言と教師の説明を聞き，0.53 を 0.24 や 0.22 のほぼ２倍とみなし，２倍の関係を「出る場合が①〇，〇①の２通りある」と理由づけした。つまり，観察されうる結果を見積もった統計的確率に整合するように再構成し，根元事象を捉えたといえる。

更に注目すべき点は，結果では①〇が他の２倍とは言えないが，KMが２倍と見積りをした点である。KMは試行結果から①〇は①〇と〇①の２通りと推測し，この推測と試行結果を再度結びつけ２倍の関係を見積もったと思われる。このことは，以下の事後の聞き取り調査からも伺える。

●事後の聞き取り調査のプロトコル

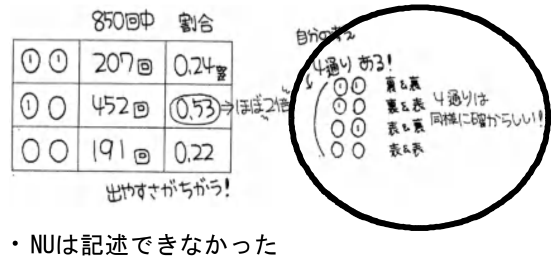
T:この割合比べたら，①〇が他の2倍とはいいがたいんだけど，どうしてだいたい2倍と思ったの？ KM:**①〇は①〇と〇①の2通りあるし，そうなると思った。**T:先生が起こりうる場合が3通りって聞いたとき，4通りって思わなかったの？ KM:**思ったけど，①〇と〇①はやっぱ同じかなってっていうのもあったと思う。**

その後，次の問を与えた。

問　起こりうる場合をどんなふうに考えたら，それらが同様に確からしいか

●図３　最初，公平と判断したSA，NUの記述

・SAの記述

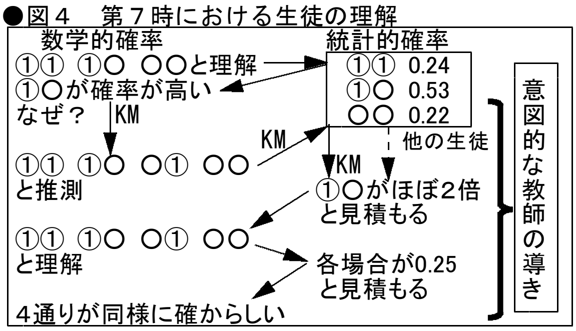


・NUは記述できなかった

SAは２倍の関係から①①，①○，○○の割合をそれぞれ 0.25，0.5，0.25 と見積もり，更に 0.5 を①○が 0.25，○①が 0.25 と見積もったと考えられる。SAと同様な記述をした生徒は他に 15 名である。一方，NUはSAのような見積もりができなかったといえる。

本授業で生徒は図4のように理解を深めた。試行結果を用いることで，樹形図等の理屈では納得し難い３通りの起こりやすさの違いを生徒は容易に納得する。しかし，「生徒自身でこの違いがなぜ生ずるかを解決し同様に確からしい根元事象を捉えること」は難しく，理屈と試行結果とを意図的に比較考察させる教師の導きが必要であるといえる。

●図４　第７時における生徒の理解



(3) 第11時の活動と分析

第 11 時は，くじ引きの順番と公平さを数学的確率で捉えた後，実際の試行結果からも考察する活動を行った。活動意図は，確からしさとしての確率という概念の形成である。

以下の問題(抜粋)を提示し，くじ引きの順番と公平さについて考察した。

> **問題**　(中略)・・先生が袋にくじを入れて持ってきて，次のようにいいました。「この袋の中にはくじが3個入っていて，そのうち当たりは1個です。今からくじを引いてもらい当たりを引いた人があいさつをする人とします。それでは太郎，二郎，花子の順にくじを引いてください。」・・(中略)・・しかし，先生は「いや，くじ引きは引く順番に関係なく公平だよ。」といいました。

生徒の殆どは，樹形図を書き上げ数学的確率により公平であると結論づけた。その後，くじ引きの個数，人数を変えくじ引きの順番と公平さを数学的確率により考察した。

次に実際に試行し確かめる。試行は２人ペアで 20 回行い，14 ペアの合計 280 回の試行結果を用いた。(右表)

当たり	回数	相対度数
1番目	87回	0.31
2番目	97回	0.35
3番目	96回	0.34

●授業のプロトコル

> T：・・(中略)・・実験結果から公平か不公平かどっちやと思う。Ss：公平ーっ。T：公平かーあ？S：不公平。T：0．31と0．35やったらけっこう違うと思うけど？
> GM：回数増やせば！。T：えっ。もう一回言って。
> GM：もっと回数増やせば，同じぐらいになる。

相対度数は 0.31，0.34，0.35 と差が出たが，生徒は公平と捉えた。GMは「もっと回数増やせば，同じぐらいになる。」と発言し，数学的確率の 1/3 及び，試行回数が増えると相対度数がある値に近づくという知識に基づき，相対度数の漸近値を 0.33 と見積もり公平と判断したと考えられる。また，GMは学習の初期（第１時）においては，理屈と実際の試行結果との矛盾を偶然によると理由付けしたが，ここでは試行回数に着目した発言をし，矛盾の解釈に変容が見られた。

Ⅴ　研究の成果と今後の課題

学習初期では数学的確率と統計的確率の相互作用は明確ではなかったが，第７時，11 時と学習が進むにつれ，生徒が２種類の確率を結びつけ考察し，相互作用に基づき確率の理解を深める過程が見られた。しかし，試行結果を示すだけでは相互作用は促進されず，生徒の捉えた数学的確率と試行結果との矛盾を教師が意図的に話題にし，なぜ矛盾するのかを解決するよう導く必要がある。

以上より，指導改善の実践的示唆として「２種類の確率の相互作用に基づく確率概念の形成を図る学習指導を考える際には，学習初期から数学的確率と現実の試行結果の両面から起こりやすさを考察する活動を行い，この活動を積み重ねることが重要である」等が得られた。

今後の課題としては，生徒によっては相互作用が促進されず，相互作用に基づき確率の理解を深められなかった者も見られ，このような生徒に対しどのような活動を組織する必要があったのかを検討し，授業改善に繋げることが挙げられる。

主要参考文献

福間政也・礒田正美(2003)「確率分野における学習過程の水準に関する研究」　日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会論文集,pp.229-234.

In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute.（2006）. Mathematics in Context. *Take a Chance（Data Analysis and Probability）*.Encyclopædia Britanica,Inc.

文部科学省国立教育政策研究所(2008) 平成 19 年度全国学力・学習状況調査中学校報告書