C－２　ワークシート

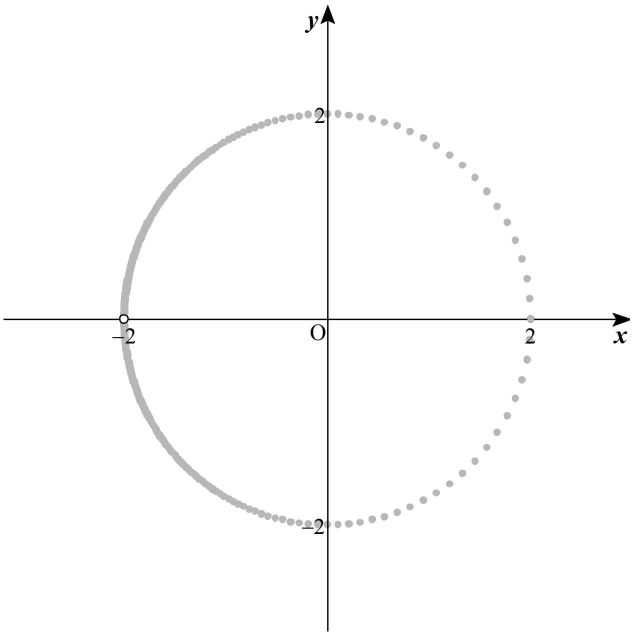
【分数式，無理式による媒介変数表示】

【問】以下の①～④のように媒介変数で表された曲線について、

(1) 媒介変数tに適当な値を代入することにより曲線上の点の座標を求め、座標平面上に何点かとることにより曲線の概形を予測しなさい。

(2) 媒介変数を消去することによりx, yについての方程式を導き、（１）での予測を確認しなさい。

① $x=\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}$, $y=\dfrac{4t}{1+t^2}$



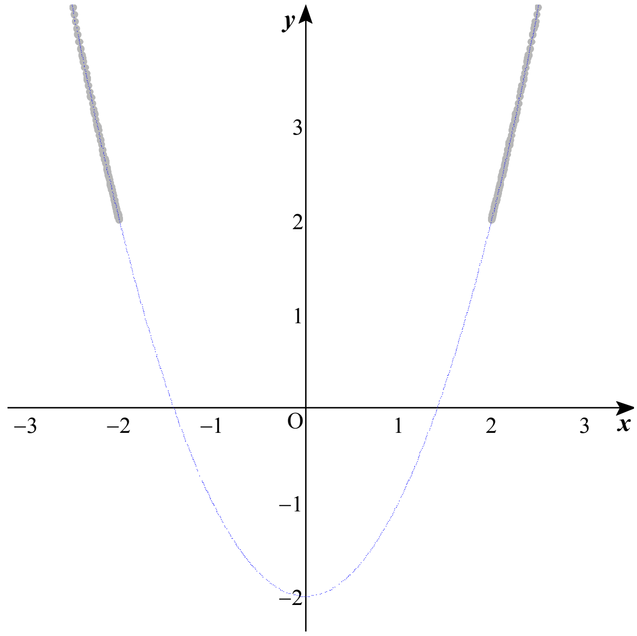
$$x^2+y^2=\frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}+\frac{16t^2}{(1+t^2)^2}=4$$

よって　円 $x^2+y^2=4$

ただし $x=\dfrac{-2(1+t^2)+4}{1+t^2}=-2+\dfrac{4}{1+t^2}>-2$

より、点$(-2\ ,\ 0)$を除く

② $x=t+\dfrac{1}{t}$, $y=t^2+\dfrac{1}{t^2}$



$$y=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$$

よって　放物線 $y=x^2-2$

ただし $t>0$ のとき　$x=t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

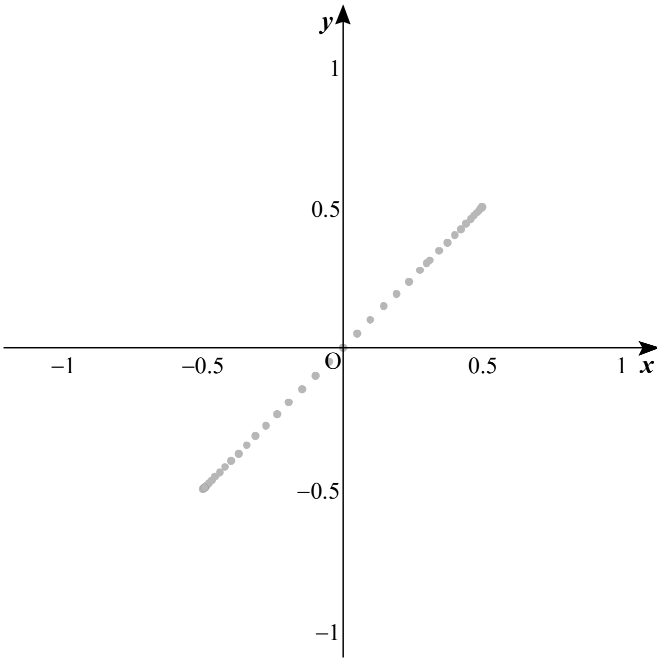
$t<0$ のとき

$t<0$　$-x=-t+\dfrac{1}{-t}\geqq 2\sqrt{(-t)\cdot\left(\dfrac{1}{-t}\right)}=2$

より　$x\leqq -2$

よって $x\leqq -2\ ,\ 2\leqq x$

③　$x=\dfrac{t}{1+t^2}$, $y=\dfrac{t}{1+t^2}$



$y=\dfrac{t}{1+t^2}=x$　より　直線　$y=x$

ただし　$t=0$ のとき　$x=0, y=0$

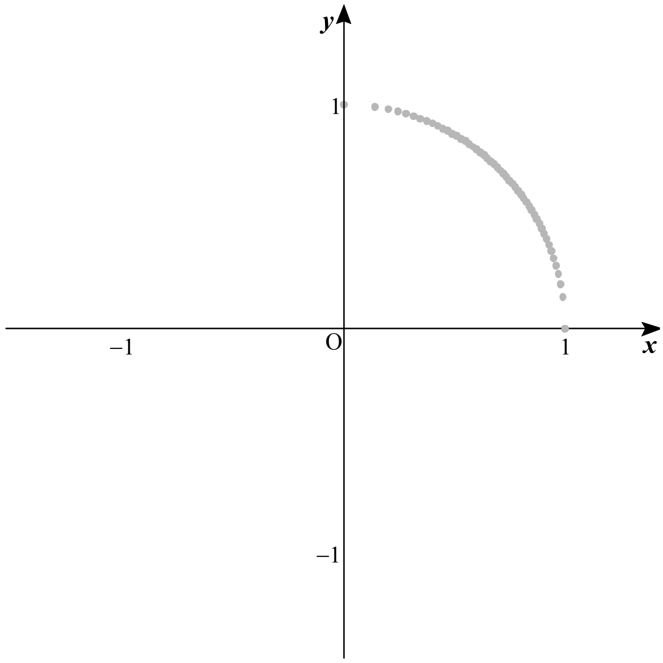
$t\neq 0$　のとき　$x=\dfrac{t}{1+t^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}+t}$

さらに　$t>0$　のとき　$\dfrac{1}{t}+t\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{t}\cdot t}=2$

$t<0$　のとき　$-\dfrac{1}{t}+(-t)\geqq 2\sqrt{\left(-\dfrac{1}{t}\right)\cdot(-t)}=2$

より　$t+\dfrac{1}{t}\leqq -2$　であるから　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$

④　$x=\sqrt{t}$, $y=\sqrt{1-t}$



$x^2+y^2=\left(\sqrt{t}\right)^2+\left(\sqrt{1-t}\right)^2=t+(1-t)=1$

よって　円　$x^2+y^2=1$

ただし　$x=\sqrt{t}\geqq 0$, $y=\sqrt{1-t}\geqq 0$