球面定理について

上越教育大学 大学院　学校教育研究科
教科・領域教育専攻 自然系コース (数学)
中 村　義 治

現代的な微分幾何学の幕開けは，1827 年に発表された Gauss の論文『曲面の研究』にあるといわれている．Gauss はその論文において，曲面の Gauss 曲率 K を，球面写像 g を用いて対応する球面と曲面の小さな部分の面積の比の極限として定義している．この曲率は，Euler が 1760 年に導入した主曲率の積と一致する．さらに，彼は「曲率が第１基本形式にのみ依存すること」,「測地三角形の内角の和は，三角形上で曲率を積分した値にのみ依存すること」を示している．Gauss の発見は，親空間に関係なく与えられた基本２次形式に依存する幾何学を創造できることを意味しており，このような幾何学では，平面における直線に相当する測地線が定義でき，測地三角形の内角の和と 180 度との差は，この測地三角形上で Gauss 曲率を積分した値に等しいことが示される．

Gauss に続いて，Riemann は 1854 年に Göttingen 大学において,『幾何学の基礎をなす仮定について』と題する講師就任講演を行い，今日多様体と呼ばれている新しい空間の概念と Gauss の曲面論の拡張を唱道した．ここで，Riemann は多様体の各点に正値２次形式を与えることにより，基本的な概念である曲率テンソルを定義している．これが Riemann 幾何学の始まりである．1917 年の Levi-Civita の Riemann 空間における平行移動に関する論文などにより，Riemann 幾何学は次第に発展してきた．1916 年 Einstein が一般相対性理論を記述するために，４次元 Riemann 多様体のテンソル解析を使用して以来，高次元 Riemann 幾何の研究は数学者のみならず，物理学者からも注目されるようになった．

19 世紀の Riemann 幾何学の研究は，主に図形の局所的な研究であった．しかし，20 世紀に至って，多様体の大域的な性質（１点の周りの振る舞いではなく，多様体全体の振る舞い）の研究は次第に重要性を増し，盛んに行われるようになった．その流れは，新しい幾何学である位相幾何学を産み出すが，微分幾何学においても，曲率と多様体全体の関係を中心に大域的研究が展開されている．

本論文では，微分幾何学の大域的研究において最も美しい定理の１つである球面定理を，Manfredo. do Carmo の著書『Riemannian Geometry』に沿って証明する．この定理は，一般に「コンパクトで単連結である Riemann 多様体の断面曲率 K が，不等式

$$0 < hK_{\max} < K \leq K_{\max}$$

を満たすとき，$h = \frac{1}{4}$ ならば，多様体は球面に位相同型である」と表記できる．ここで，曲率を定数倍することによって，$K_{\max} = 1$ として

もよく，条件式は一般性を失うことなく

$$0 < h < K \leq 1$$

とできる．コンパクト単連結で定断面曲率１を持つ多様体である球面に対して，断面曲率が１に近い値で変化する一般の多様体はどのようなものであるかを考えることは自然な疑問であった．球面定理は，初め Rauch によって $h = \frac{3}{4}$ に対して証明された．その後，Klingenberg が最小跡の概念を導入して $h = 0.55$ まで改善した．Berger は，Toponogov の定理を用いることで，偶数次元において，$h = \frac{1}{4}$ まで成り立つことを示し，最終的に，Klingenberg が奇数次元についても成立することを示した．

h の値の改善はさらに研究が進められ，$h = \frac{1}{4}$ のとき，$0 < h \leq K \leq 1$ に対して，偶数次元では反例が示された．奇数次元では真であることが示されたが，それ以上の改善ができるかは知られていない．また，２, ３次元の場合は $h \geq 0$ であれば球面に同相となる．つまり，コンパクト単連結で正の断面曲率を持つ２または３次元 Riemann 多様体は球面に位相同型となることが示されている．

さらに，球面定理の“ 同相 ”を“ 微分同相 ”に置き換えが可能かどうかが疑問になるが，本論文の証明法では微分同相を十分に確立し得ない．微分同相を与える次元ごとの h_n の値は様々な研究から改善はされているが，可能な最良値は未だに知られていない．この他，$h < \frac{1}{4}$ に対して，多様体がどのようなものであるかということに多くの研究者が取り組んでいる．

本論文は８章から構成されており，その概略は次の通りである．

Riemann 幾何学を展開する場としての可微分多様体をはじめ，接空間，Riemann 計量，Riemann 接続などの基礎的事項を第１章に，Riemann 幾何学の基礎をなす２つの重要な概念である測地線と曲率についてを第２章に記述した．

第３章には，測地線と曲率の関係を解析する手段として，Jacobi 場，変分のエネルギー，大域特性を知る手がかりとなる Rauch の比較定理，および重複度と共に数えられる測地線分上の共役点の個数とエネルギーの第２変分公式に現れる２次形式 $I_a(V, V)$ の指数との関連付けをする Morse の指数定理を記述した．

第４章から第７章は，多様体の位相上で曲率の影響を調べる研究から生まれた大域的特性に関する諸定理を，第４章には完備多様体，第５章には定曲率空間，第６章には部分多様体，第７章には負曲率多様体の基本群について，関連事項と共にまとめた．特に，Hadamard の定理は，「断面曲率 K が 0 以下の単連結な完備 Riemann 多様体は同次元の Euclid 空間と微分同相である」ことを述べており，正の曲率を持たない多様体の大域的特性を示している．また，Bonnet-Myers の定理「曲率がある正定数以上である完備 Riemann 多様体はコンパクトでその直径はその正定数によって推定できる」は，球面定理において有用な働きをしている．

最終章では，先に記した球面定理の証明を行う．そのために，まず最小跡の概念を記述した．最小跡は，１点から出る測地線の最小性が保持される限界点の集合である．多様体上の各点とその最小跡までの距離の下限である単射半径を評価することは，コンパクトで単連結な Riemann 多様体の特性を見出すために有効な手段である．本論文における球面定理の同相写像は２つの円板をその境界で接着する手法で得られるが，ここでは単射半径の評価が大きな役割を果たしている．また，証明は Toponogov の定理を用いない塚本の方法で行っている．

指 導　　森　博