平成 16 年度大学院派遣研修報告

実験を伴う関数の授業における子どもの思考過程について

―数学的モデリングに着目して―

上越教育大学　横関　達人

１　はじめに

学習指導要領解説には、関数指導の意義として、「関数的な見方や考え方が、自然現象や社会現象の理解や考察に必要であること、数学の他の分野の学習にも重要な役割を果たすこと」が挙げられている。しかし、関数は子どもにとって苦手な分野となっているのが現状である。関数を形式的に扱うあまり、事象から離れたところで教え込む指導に終始しているからではないだろうか。そこで、「具体的な事象」、「観察、操作、実験など具体的な活動」の２つをキーワードに、関数指導の改善に取り組むことにした。

本研究は、実験を起点とした数学的モデリングの関数授業における子どもの思考過程に注目し、関数的な見方や考え方がどのように形成されていくのかを認知学的モデルの視点から明らかにし、関数指導の改善における示唆を得ることを目的とした。

２　実験と数学的モデリングへの着目

２つのキーワードから着目したのが、実験と数学的モデリング（以後、数学的モデリングを単にモデリング、数学的モデリングの過程をモデリング過程と略記）であった。

２.１　実験について

実験を関数の授業に取り入れる意義としては、次の２つを挙げる。１つは、実験における変量の変化の様相を捉えようとすることで、関数の本質に迫れることである。もう１つは、子どもが実験結果から表やグラフ、関数の式などを創り出し、数学的な表現や処理と接続する指導が具現化できることである。

特に、本研究では森田（1991）の実験について概観し、現物実験と思考実験が表裏一体の活動であることを強く意識して相乗効果のある取り入れ方を研究した。

２.２　モデリングについて

三輪（1983）は、モデリングの意義の１つとして数学的な考え方が育成される点を挙げ、図１のように図式化している。

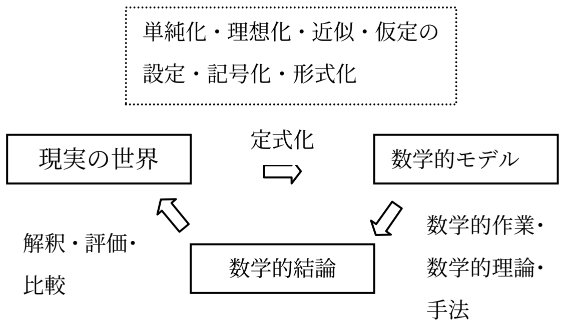

図１　三輪（1983）のモデリング過程

本研究では、モデリングに関数教材を取り上げることにより、関数的な見方や考え方も形成されると考えた。

３　モデルの自己発達を視点として

では、どのように関数的な見方や考え方が形成されるのであろうか。これを明らかにしていくには、モデリング過程における子どもの認知過程に光を当てていく必要がある。

一般的に、モデリングで扱われる数学的モデルは問題解決をねらいとして活用され、このモデル自体、変化するものである。したがって、モデルの変化を追うことで子どもの思考過程を辿ることができると考えた。

そこで、モデルの変化をより詳細に捉えるために、現実的数学教育　Realistic Mathematics Education（略称　ＲＭＥ）を概観した。Gravemeijer（1997）は、一般的な数学的モデルとは異なる認知学的モデルを、

「Situations」に依存した「Model　of」と「Fomal　maths」へと向かう「Model　for」に階層化している。そして、「Situations」と「Fomal　maths」の隔たりを、２つの認知学的モデルで橋渡ししていくと考えた（図２）。

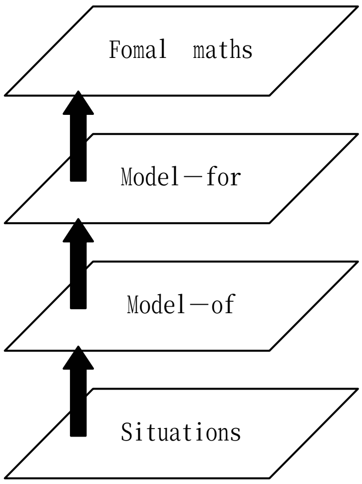

図２　Gravemeijer（1997）のモデルの自己発達

しかし、ＲＭＥでは「Model　of」から「Model　for」への発達過程をあまり明確に示していない。そこでこの点を明らかにするために、モデルが洗練されることを強調して、「Model　of」を「素朴なモデル」、「Model　for」を「洗練されたモデル」とした。

この２つのモデルの違いは、定式化されているかどうかによるものとする。例えば、「素朴なモデル」としては図や表、グラフ、「洗練されたモデル」としては関数の式をそれぞれの一例として挙げる。関数の式を境界線に置いたのは、定式化できた時点で関数的な見方や考え方がかなりの水準に達していることと、関数の式が他の表現を包括し最も端的に事象を表現しているからである。

４　実験を起点としたモデリング

以上の考察を基に、実験を起点としたモデリングについて定義して図式化し、本研究の理論的枠組みとした（図３）。

ただし、モデリング過程は、順序通りに進むものではなく、逆戻りの過程もあると考えられる。

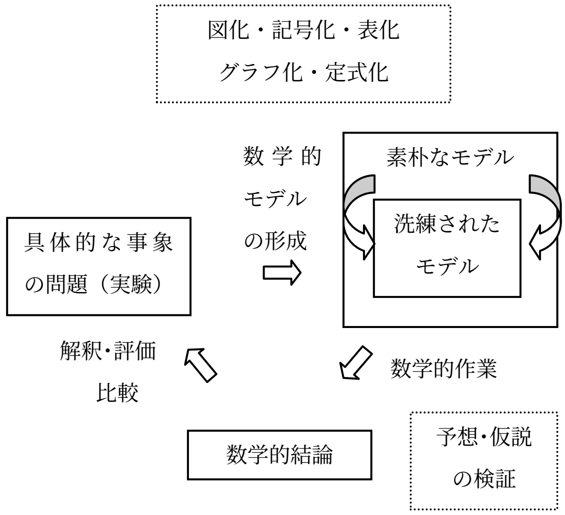

図３　実験を起点としたモデリング

５　教授実験の概要

石川県にある公立中学校３年生の選択授業１クラス15名を対象として、教授実験を実施した。１次関数「線香の燃え方を調べる実験」を５時間、続いて２次関数「台車の転がり方を調べる実験」を４時間実施した。教授実験は、授業と事後調査で構成し、３台のＶＴＲと１台のＩＣレコーダーで記録した。

６　子どもの思考過程の分析

分析については、子どもが創り出したモデルと発話を手がかりにして、子どもの思考過程を明らかにした。一例として、２次関数の定式化に至る過程を取り上げる。

島田（仮名）は、まず次のようなモデルを創り出し、課題解決に活用していった。

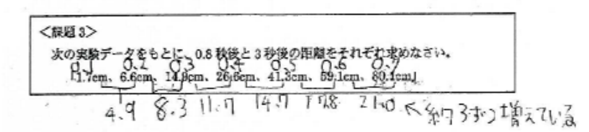

図４　島田の数値の活用

図４は、距離の増え方の変化から規則性を見つけようとしている。横の変化以上の発展は見られないため、素朴なモデルである。この図４を基にして課題解決を図ったが、子どもは横の変化を差で捉えることに限界を感じていたため、教師が横の変化を倍数で捉える支援を送ることにした。これにより、島田は

図５を創り出した。

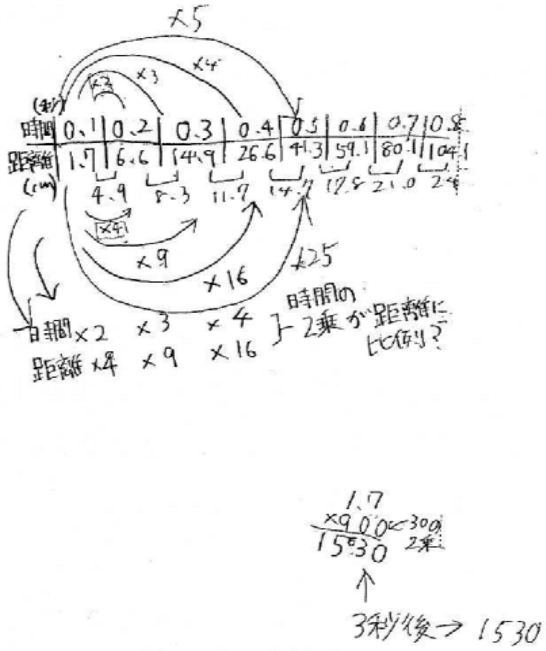

図５　島田の倍数で捉えた表

図５では「時間の２乗が距離に比例？」と表現している。表現は間違っているが、時間と距離の変化を倍数で捉えることで何らかの対応関係を理解し始めており、図５を契機として表の横の変化から縦の対応へのきっかけを掴み始めている。ただ、この表ではどこかの数値を基準にして倍数関係を求めていかなければならず、比例定数の考えも欠けているため依然として素朴なモデルである。

続いて、x^2とｙの値を比較することで、定式化に至ることができた（図６）。

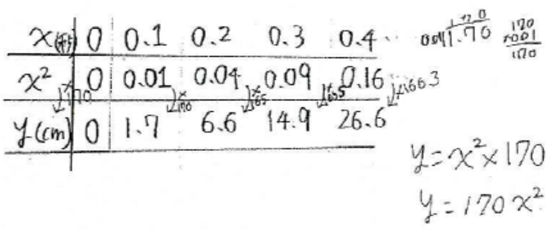

図６　島田の定式化とその過程

変化の特徴を２乗倍で捉え、対応の決まりを比例定数 170 に集約して洗練されたモデルへと発達させたのである。

７　考察

子どもの思考過程について考察する。

第１に、モデリング過程には逆行や往復、飛躍があり、このときに関数的な見方や考え方の伸展があった。つまり、表やグラフの見方を変えるなどして素朴なモデルの自己発達が見られ、これが関数的な見方や考え方を伸展させていたと考える。

第２に、モデリング過程を何度も繰り返すことで定式化に至る過程の隔たりを埋めていた。つまり、モデリング過程を繰り返すことで、図４、５、６のような素朴なモデルの洗練が起こり、その度に数学的結論も積み重ねられている。そして、事象の数値的な捉えの可能性を少しずつ広げながら、定式化へ辿りついていた。

第３に、洗練されたモデルから素朴なモデルに戻って課題を解決する場面が見られた。これは、洗練されたモデルの意味を子ども自身がまだ十分に捉え切れていないからである。しかし、素朴なモデルへ戻ることで洗練されたモデルの意味をより鮮明に捉えられるようになっていった。このように２つのモデルの段階を往復することで、より関数的な見方や考え方が形成されるのである。

８　おわりに

今回は、「具体的な活動」として実験をモデリングに取り入れて取り組んできた。これからも「具体的な事象」を授業で再現して操作活動などを取り入れていくことが、子どもの思考の活性化につながると考える。また、モデルから子どもの思考過程を辿り、指導に活かすことも重要である。今後は関数に限らず、他の分野でも子どもが創り出すモデルに着目し、モデリング過程を意識しながら学習指導の改善に努めていきたいと考える。

＜引用・参考文献＞

Gravemeijer， K．（1997）． Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes＆P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics ： An International Perspective*（pp. 315－

345). East Sussex：Psychology Press.
三輪辰郎.（1983）. 数学教育におけるモデル化についての一考察. 筑波数学教育研究第２号，pp. 117～125.
森田俊雄.（1991）. 算数・数学教育の新展開ー局所的な数学と思考実験ー. 東洋館出版社.