金沢大学大学院教育学研究科数学教育専攻
宝達志水町立志雄中学校　教諭　宮城　宏

研究主題　創発的視野に着目した一次方程式における指導の改善

要約：ＲＭＥ理論は学習のパラドックスを解消しようとするための有望な理論である。本研究は，このＲＭＥ理論のEmergent Modelingの考えに基づいて一次方程式における指導の改善を行うことを目的とする。その方法として，まずＲＭＥ理論の考えを参考にしながら，自ら一次方程式の単元を構成した。次にEmergent　Modelingを参考にしながら創発的視野にもとづく分析枠組みを構築した。構成した単元にもとづき授業実践を行い，分析枠組みを用いてある生徒の学習活動について分析を行った。その結果，Emergent Modelingにおいて記述されにくかったレベル間の移行についての様子が２次元のグラフで記述することができた。このことにより，生徒が他者との相互作用を通して形式的な一次方程式の知識を身につけていく様子も明らかになった。

キーワード：一次方程式，Emergent Modeling，創発的視野

Ⅰ　本研究の動機・目的

生徒がまだ学んでいない抽象的で形式的な数学の知識を生徒たちはどのように獲得していくのか。その問題は学習のパラドックスと呼ばれている。学習のパラドックスを解消する1つの方法としてGravemeijer(2007)はＲＭＥ理論の立場に基づきEmergent Modelingというアプローチを提言している。

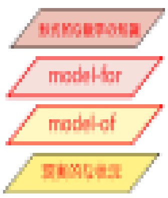
そこで，本研究はＲＭＥ理論のEmergent Modelingを参考にし，一次方程式の指導を改善することを目的とする。

なお，本研究の目的を達成するため方法として，以下に述べるEmergent　Modelingとその問題点を検討することで考えた。

Ⅱ　Emergent Modelingとその問題点

ＲＭＥ理論はいくつかの原理から成り立っている。そのうちのひとつに水準論がある。

Gravemeijer (2007)は，それをEmergent Modelingと称し，４つの水準を設けることによって，学習のパラドックスの解消を図ろうとしている。その４つの水準とは右の図のように現実的な状況から出発して，モデル(model-of，model-for)を手がかりに形式的な数学の知識を獲得していけることを提案している。



(Gravemeijer　2007)

そして，Gravemeijer (2007，pp1-20)は，「モデルの上昇が常に順当に成り立つとは限らない。生徒のレベルがどのように移行していくのかというパラドックスは残ったままで，より上のレベルに達するということが，どういうことなのかが明らかにされていない。特にmodel-of と model-for の間で，どのように移行しているのかを明らかにする必要がある。」ことを指摘している。このように，Gravemeijer (2007)は学習のパラドックスを克服するためにmodel-ofとmodel-for に視点を置くことは述べている。しかし，どのように分析していくかは明確にしていない。

また，ＲＭＥ理論のEmergent modelingに基づいてつくられたMathematics in Context (MIC，2006)の教科書で見てみると，一次方程式の単元は関数を含む代数領域で扱われ，連立方程式の単元の後に学習している。一方，日本では，関数(領域「数量関係」)とは別の領域「数と式」で扱われ，連立方程式の単元の前に一次方程式を学習している。つまり，ＭＩＣにおける一次方程式の単元構成は，まったく日本のものとは一致していない。これらのことから本研究では次の２点の方法で目的を達成する。

(1)Emergent modelingにもとづく日本で扱う一次方程式の単元を開発すること。
(2)開発した単元の授業において生徒のレベル間の移行の様子について分析的に見る枠組みを考案すること。

Ⅲ　単元構成の原理

ＲＭＥ理論のEmergent modelingに基づいてつくられたＭＩＣの教科書を参考に，全授業時数は，１７時間(うち１時間は計算練習，１時間は評価テスト)とした。なお，①～⑬のすべての課題において生徒たちがもつ知識や経験をできるだけ活かしてモデルに表すことができる文脈を出発点とし形式的な数学の知識が獲得できる授業展開を考えた。そして，４つのレベルの判断規準を設定し，課題に応じて各レベルの内容を区別した。以下が各レベルとその判断規準である。

Level１　現実的な状況

授業で目指すめあてに向けてこれまで学んできた知識や方略を応用していける具体的な状況が文脈で提示されるレベル。

Level２　model-of

Level １の具体的な状況を表した文脈を線分図や表等のモデルに置き換えられるレベル。

Level３　model-for

Level２で置き換えられたモデルから形式的な数学の知識を獲得するための数量関係や規則性がとらえられているレベル。

Level４　形式的な数学の知識

１時間あるいは数時間の授業で形式的な数学の知識が獲得できているレベル。

また，単元構成は，文脈(Level１)からモデルに表現し，徐々に発達させて形式的な数学の知識(Level４)につなげていけるように配慮した。以下が単元の各課題における目標である。

＜１　次＞

①力比べ（綱引き）における相等及び大小の関係に関心をもち，それらの関係を判断することができる。

②力比べにおける相等関係に関心をもち，相等関係を保つための条件（等式の性質）に気づくことができる。

③距離（カエルのジャンプ）における相等関係に関心をもち，相等関係を保つため条件（等式の性質）に気づくことができる。

（以下，課題⑨まで同様の文脈を用いる。）

＜２　次＞

④距離における相等関係をもとに，１つの事象に表れる未知数を求める過程で等式の性質に気づくことができる。

⑤文脈(同方向へ進行)から距離の相等関係を捉え，方程式に表すことができる。

⑥文脈(互いに接近)から距離の相等関係を捉え，方程式に表すことができる。また，移項の考えを使って方程式を解くことができる。（２時間)

＜３　次＞

⑦文脈から相等関係を捉え，括弧をふくむ方程式をつくり，その解き方がわかる。

⑧文脈から相等関係を捉え，小数係数をもつ方程式をつくり，その解き方がわかる。

⑨文脈から相等関係を捉え，分数係数をもつ方程式をつくり，その解き方がわかる。

＜４　次＞

⑩過不足に関する問題の解き方を理解し，実際に解くことができる。

⑪速さに関する問題の解き方を理解し，実際に解くことができる。（２時間)

⑫割合と平均に関する問題の解き方を理解し，実際に解くことができる。

⑬具体的な事柄の中から，相等関係を見抜き方程式が立式できるよう練習する。また，その中で解の吟味の必要性を理解することができる。

Ⅳ　分析枠組み

分析枠組みを構築する際に，“emergent”の本来の意味を考えた。

Cobb と Yackel (1995)は，子どもが行動している心理的な分析は，心理的視野と社会的視野の相互作用で数学の教室(授業)を見ていこうとする Emergent Approach を打ち出している。

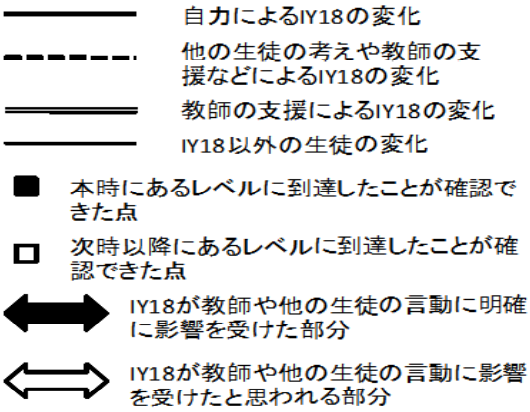
また，鈴木宏昭(2006)は，認知の創発的性質の１つとして,赤ちゃんの歩行を例に挙げ,赤ちゃんが一人で歩けるようになるということは，大人が支えるという他者との関わりで歩行の感覚を覚えていく。つまり，子どもだけが成熟して歩き出せるのではなく,大人(他者，複数のもの）との関わりが大きな影響を及ぼすとしている。

上記のことから“emergent”という意味は，複数の要素が相互に関係し合って，ともに全体として発達していくことと捉えた。そこで，その意味を活かしながら，ある生徒が教師や他の生徒との関わり合いをもとに，レベルを

上昇していく様子を捉えていくことを本稿では「創発的視野」の視点と呼ぶことにし，レベル間の移行のメカニズムを分析する枠組みを提案する。

この枠組みは，先に述べた４つのレベルの判断規準と実際に授業で見られたある抽出生徒（「IY18」と表記する）の様子を，授業のプロトコルや生徒のワークシートの記録をもとに，その移行が自力によるものか，他者との関わりによるものかを判断し，2次元のグラフで記述できるようにした。

なお，生徒の自力による活動や他者と関わりを記述するためにグラフ上で表す線や点を以下のように考案した。



ここでは，１つの事例として，小数を係数にもつ方程式の学習場面（３次２時：課題⑧）の１人の抽出生徒IY18についての分析結果を紹介する。以下では３次２時のレベルの判断基準，生徒のワークシートをもとにしたレベルの変化の様子について順次述べる。

(1) ３次２時のレベルの判断規準

Level１　現実的な状況

カエルのジャンプ⑥の内容を読み取る。

Level２　model-of

２匹のカエルの位置関係を絵図，線分図，表に表したり，算数的な方法で求めたい数を具体的に求めたりしている。

Level３　model-for

モデルをもとに未知数をｘとして，小数係数をもつ方程式で表している。

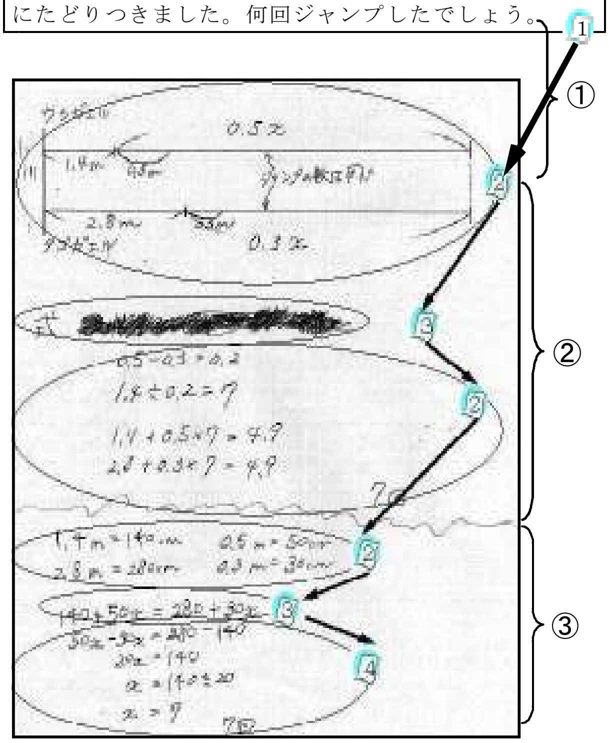
Level４　形式的な数学の知識

小数係数をもつ方程式は整数係数の方程式に直して解を求めている。

(2) ワークシートで見るレベルの変化の様子

以下は，課題⑧の文脈と授業で記入した生徒IY18のワークシートである。なお，旗印の数字はレベルを表す。

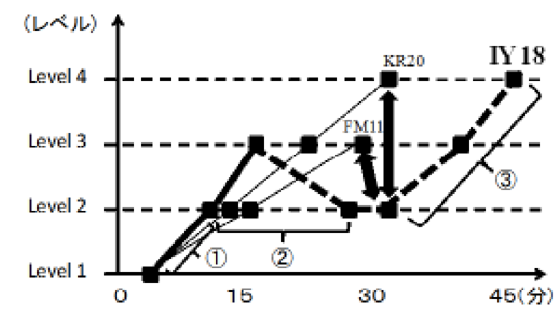
ウシガエルは小川から1.4m離れたところから１回につき0.5mずつ，タゴガエルは小川から2.8m離れたところから１回につき0.3ｍずつジャンプする。２ひきのカエルは同じ数だけジャンプすると，ちょうど小川から同じ地点にたどりつきました。何回ジャンプしたでしょう。



(3) グラフで表したレベルの変化の様子

授業中の生徒の発言とワークシートを基に先に述べたグラフ上の点や線を用いたIY18のレベルの変化の様子は次のようになる。

3次 2時のレベルの変化の様子



このグラフの中でIY18のレベルの移行について判断した根拠を３つに分けて述べる。

①Level１→２と判断した根拠

IY18は，問題状況をとらえて，求めるジャンプの数をｘ回とおき，２匹のカエルの距離の相等関係を線分図に表していたので，自力によるLevel１→２と判断した。

②Level２→３→２と判断した根拠

（プロトコル１）

10015 BK10 先生。どうしても方程式で解かなだめ？

10016　T　　自信がなかったらどっちでも。

IY18は，相等関係を線分図でつかんだのち，小数係数を含む方程式を立式していたので，自力によるLevel２→３と判断した。

次に，IY18が小数係数の方程式を書き込んだ後に，BK10の「どうしても方程式で解かなだめ？」という質問があった。教師は，生徒がとにかく自力で解くことを重視していたので方程式の解き方にこだわることなく「自信がなければどっちでも。」と答えた(プロトコル10015～10016)。こうしたBK10と教師の話し合いを聞いたあとに，IY18は，方程式を黒く塗りつぶし，方程式を使わない算数的な考え方で答えを導いていた。これは小数係数をもつ方程式で立式しても，その計算に自信がなかったために，方程式を使わない算数的な方法（Level２）で考え直したとみられる。したがって，BK10と教師の話し合いに影響を受けて，Level３→２に変化したと判断した。

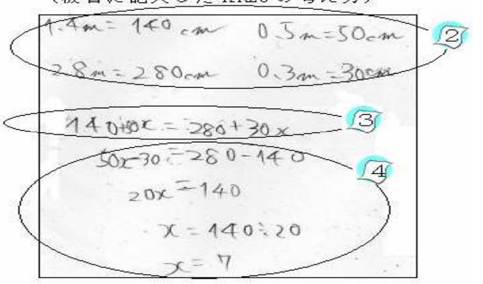
③Level２→３→４と判断した根拠

（プロトコル２）

10020　T　はい，ではHM26さんはここ（黒板の左側）に，FK11君（黒板の中央）はここに，KR20さん（黒板の右側）途中までのものでいいからそのまま写してくれるかな？はい，３名の人よろしく。さあ，どんなふうに書いてあるか見比べてみよう。

10021　Ｓｓ（指名された３名の生徒が自分の考えを板書する。）

（板書に記入したKR20の考え方）



（プロトコル３）

10049 KR20 mをcmにして方程式をつくりました。あとはFK11君と同じように移項して答えは７回 となりました。どうですか。

10050 Ｓｓ（いいです。）

10051 Ｔ はい，この中で唯一１人だけだったけど， KR20さんはmをcmに直してくれました。そして，式もFK11君と同じ考え方でcmで式を立てると，こういう式になった。で，最終的に答えはどうだろう。

10052 Ｓｓ（いっしょや。）

10053 Ｔ やっぱり，いっしょになるげんわ。

10054 Ｓｓ（なるんや。ほんとや。）

教師は，ある程度，自分の考えをワークシートに記入させて，代表者３名を指名した。代表者３名の考え方とは，方程式を使わない方法（HM26），小数係数をもつ方程式を立式した方法（FM11），整数係数の方程式を立式した方法（KR20）で，意図してこの３つの考え方を採り上げ(プロトコル10020～10021)，他の生徒への参考にしてもらった。

特にKR20は単位をmからcmに直してすべて整数に直してから方程式を立式し，計算して答えを導き出していた。教師はKR20の答えとFM11の小数係数の方程式で計算した答えを比較させ，最終的に解は同じになることを確認させた(プロトコル10049～10054)。しかし，ここでは，IY18はKR20が板書したものだけを書き写していた。

したがって，FM11の考え方やKR20の考え方に影響を受けて小数係数をもつ方程式に立式できることや整数係数に直しても解は変わらないことに気づくことができたので，Level２→３→４に変化したと判断した。

Ⅴ　成果と課題

Emergent Modelingを参考に構成した単元と創発的視野の視点による分析枠組みで分析した結果，他者との相互作用でレベル間を移行する様子が見られた。また，レベル間の移行の特徴がこれまでのEmergent Modelingでは記述されにくかったものが，レベル間の移行の変化の様子が２次元のグラフで記述しやすくなった。また，事例には紹介していないが，複数の授業にわたって相互作用する様子も見られた。

課題としては，ワークシートやある生徒を他者との関わりで考えようとしたが，実際その生徒に事後インタビューすることがなかった。よって，他者と関わりながらレベル間を移行していくという可能性について記述したが，生徒の情報としては十分にそれを裏打ちするような確証までは得られていない。

今後は以上の点を補いながら創発的視野に基づく分析を進めていきたい。

＜主要参考文献＞

Gravemeijer, K.（2007）. Emergent modeling and interactive processes of design and improvement in mathematics education. A paper presented at *APEC-TSUKUBA International Conference Ⅲ*. pp1-20.