平成２２・２３年度　大学院派遣研修　研修報告（概要）

金沢大学大学院教育学研究科教育実践高度化専攻
宝達志水町立宝達小学校　　教諭　　杉谷　靖史

研究主題　中学校数学科における帰納的な推論から演繹的な推論への移行の研究
－図形指導における性質から命題への理解の変容過程の分析－

要約：　本研究の目的は，中学校数学科図形指導において，帰納的な推論から演繹的な推論へと移行を促進するための手だての有効性と指導の指針について検討し，これらの態様を明らかにすることである．そこで，本論文では，帰納的な推論から演繹的な推論へ移行していく様態を分析する方法として，「性質から命題への移行」という視点を採用する．本研究では，先行研究の指摘や調査研究から，性質間の関係を考えたときに，まずは性質を理解することがあり，性質の理解から性質間の関係を理解し，そして命題の理解へと変わっていくことをもって，帰納的な推論から演繹的な推論へと移行するというふうに見なすこととし，それが性質から命題へ移行することと考える．性質と命題についてはオランダの教科書（Moderne wiskunde 3 vwo）が示す，帰納的に公式を推論し，それをもとに命題を意識的に構成し，それを具体的に確かめ，最終的に命題が一般的に正しいことを演繹的に説明する，を参考にして，性質から命題への移行をめざした単元を計画し，そして筆者自らがデザイン実験を行うことによって，移行がどのように促進されるのかという可能性を探った．抽出生徒を中心に実践結果の分析データから性質から命題への移行の様態について，以下の知見を得ることができた．

・性質から命題への移行を促進させるには,帰納的な推論による推論による性質の理解から，性質間の関係を理解するために，［F 図･Z 図］といったアイテムの活用することによって，平行線の性質を命題としてとらえ始めることが確認された．

・マッチ棒を使った文字と式による説明の問題を取り入れたことにより，生徒にとって，具体例を挙げて帰納的に公式を推論し，公式をつくった後，その公式（命題）が正しいかどうかを確かめていく場面を設定したことで,命題の理解が促進されたのではないかと考えられる．

キーワード：帰納的な推論から演繹的な推論へ，性質から命題へ，移行，デザイン実験

Ⅰ　はじめに

(1)問題の所在

中学校の証明学習に困難を感じる生徒は少なくない．証明指導の初期段階において，三角形の内角の和の性質や二等辺三角形，平行四辺形の性質は小学校での学習によって生徒は既に知っている．しかし，それらの性質についてはまだ証明されていない事柄のため，それがいつでも正しいという命題として捉えることに大きな戸惑いがあるように思われる．そのため生徒にしてみれば，小学校での既習であることをなぜ証明しなければならないのかの必要感が見いだせない現状がある．つまり，中学校では証明指導は行っている．生徒は証明するということはしているが，それがある事柄が成り立っているということを基にして別の新しい事柄が正しいことを説明していく演繹的な推論として考えている状況にはなっていないのではないかと考える．よって，筆者は，観察，操作や実験などの活動を通して，例えば，基本的な平面図形の性質を見いだし，平行線の性質を基にしてそれらを確かめることができるようにするには，まずは性質を確実に理解することが求められる．性質の理解があり，性質間の関係に気づき，性質間の関係を理解する．そして，その性質がいつでも正しいということ，つまり命題として理解することが大切と考える．

(2)研究の目的と方法

本研究は，中学校数学科図形指導において，帰納的な推論から演繹的な推論への移行について検討することである．帰納的な推論から演繹的な推論へと移行を促進するということを，「性質の理解があって，性質の理解から性質間の関係を理解し，その上で命題の理解があり演繹的な推論による証明を行うようになること」としてとらえる．よって，本研究の目的は，中学校数学科図形指導において，帰納的な推論から演繹的な推論へと移行を促進するための手だての有効性と指導の指針について検討し，これらの態様を明らかにすることである．この目的に接近するために，研究の方法として，オランダ教科書が示す，帰納的に公式を推論し，それをもとに命題を意識的に構成し，それを具体的に確かめ，最終的に

命題が一般的に正しいことを演繹的に説明する，という構成を本研究の指針とし「性質から命題への移行」という視点を取り入れる．筆者はこのような立場に立ち，単元を計画し，中学校 2 年生を対象にデザイン実験を実施し，授業データを基に帰納的な推論による性質の理解があり，そして性質間の関係を理解し，その上で命題を理解する段階があり，最後に演繹的な推論によって証明を行うという移行について検討を行う．

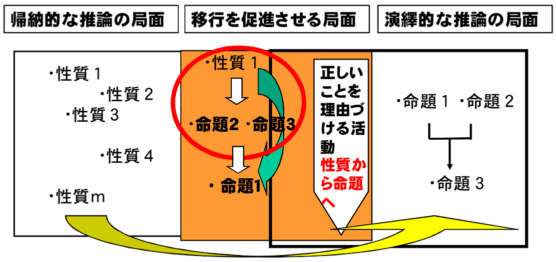
Ⅱ　先行研究の検討

岡崎(2007,2009)らは，算数から数学への移行を考えるときに，図形の認識面と社会性の面を取り入れ，算数的段階では，図形の特徴の認識が大切であり，数学的段階では図形の演繹性の認識が重要である．その図形の関係性の着目した場合，関係性の認識が足りないため，岡崎らの研究では，図形の特徴や図形の関係性をつくることについては明確に示されている．しかし，その方法として，麻の葉の移動や作図を手段として行うのではなく手だてとしているところに疑問が残る．帰納的な推論から演繹的な推論へ移行させるためには，図形の関係性を理解することは大切ではあるが，それ以前に図形の性質を理解すること，性質を理解した上で，性質間の関係を理解すること，そしてその上に命題の理解があってはじめて演繹的な推論による証明を行うのではないか，つまりは麻の葉の移動や作図以外の方法で移行を促進させることについては研究途上であることが示唆される．

また，全国学力･学習状況調査問題の結果を分析すると，小関ら(1987)の「図形の論証指導」における調査から約 20 年がたった今での通過率は低く，生徒にとっては帰納的な推論を経て演繹的な推論を行うことに抵抗があり，その移行を促進させる教材開発の必要性が裏付けされたことが示唆される．

Ⅲ　デザイン実験について

先行研究の検討から，「性質から命題への移行」を次のようにとらえる．教科書の導入では，おもに小学校で培われてきた[帰納的な推論の局面]をもとにしながら，性質として理解してきたものを，その性質はいつも正しいといえるのかどうかを考えさせる場面を[移行を促進させる局面]として設定することで，生徒はその理由を根拠のもとにして考えていく活動を行う．その理由を考える活動によって，性質から命題へと思考が変容していくととらえ，真偽を問う活動を多く取り入れ，充実させることが，移行を促進させる局面では重要と考える．この移行を促進させる局面の充実が，根拠をもとに説明する演繹的な推論の局面において，演繹的な推論による証明活動を行うと考える．このような流れをイメージ化すると次のようになる．(図 1 参照)



【図 1　移行をとらえるイメージ図】

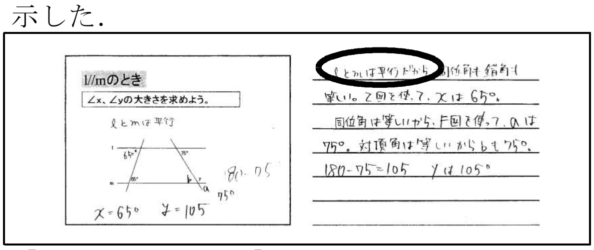
そこで，命題を意識的に構成したり，命題の真偽を問う場を設定したりすることで，性質から命題への理解が高まり，演繹的な推論を促進させるだろうという仮説を立てた．そして単元を計画し，一度実践を行い，初めに実践したクラスの生徒の反応や教師の問いなど，その実践を振り返って，授業の工夫を練り直し再度単元の構成を行い，もう一度違うクラスで授業実践を行った．このようなデザイン実験を試み，その指導の在り方が仮説を洗練していくこととととらえた．さらに，性質から命題への移行を一層促進させるため，オランダの教科書の単元「Reasoning in geometry (幾何における推論)」(2005)の小単元「公式を用いた推論」を参考にした．

Ⅳ　授業の実際と生徒の活動の分析

授業は 2011 年 11 月 8 日から，筆者が当時勤務していた公立中学校 2 年生 1 クラス 34 名を対象に実施した．本稿では，第 1 段階(第 4 時～第 5 時)，第 2 段階前半(第 10 時～第 11 時)，第 3 段階(第 18 時)，第 4 段階(第 19 時～第 20 時)を取り上げる．なお，特定生徒のワークシートの記述を中心に分析したことを示していく．

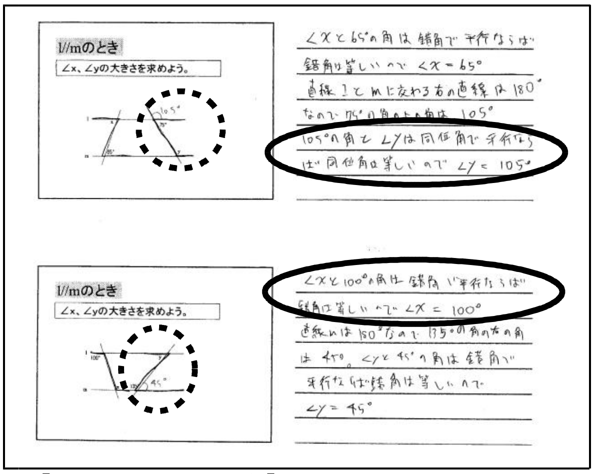
(1) 第1段階 (第4時~第5時) の活動と分析

生徒は平行線の性質を理解するアイテムとして同位角を F 図，錯角を Z 図として用いるようになった．そして以下の問題を生徒に提示した．



【図 2　KA の記述】

KA は，「平行だから･･･」同位角は等しいと示している(図 2)．しかし，この時点ではいつでも平行だから同位角は等しいと性質を命題として理解しているとは考えにくい．



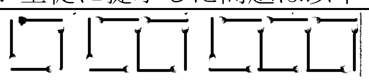
【図 3　HR の記述】

一方，HR は発言の中で，「上の棒と下の棒のそれぞれ同じ位置にある角はいつも等しい」と述べ，同位角が等しいことを見つけ出している．ここでは，「いつも」と強調していることから，「いつも」の背景にある根拠はワークシートの記述から見とることができる．図 3 の中（◯）で「F 図･Z 図」を示し，2 直線に対して交わる 1 つの直線からできる角の関係に着目した上で∠χと 100°の角は錯角で，平行ならば錯角は等しいので∠χ＝ 100°と記述し，平行ならば同位角は等しい，平行ならば錯角は等しいと平行線の性質を理解したと見ることができる．「F 図･Z 図」を見つけながら，その角が等しいことがわかればいつでも平行が成り立つという「命題への理解」の入口に差しかかったと考えられる．

(2) 第2段階前半（第10時~第11時）の活動と分析

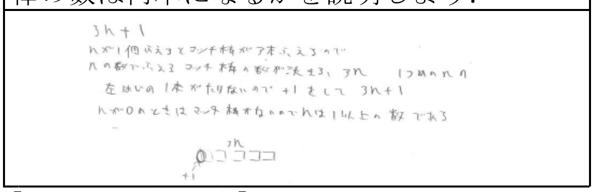
文字と式のよる説明の問題を挿入した．本来はこの単元では扱わない．ここであえて扱うことにしたのは，オランダ教科書にある「公式を用いた推論」から示唆を得て，公式をつくるために多くの具体例を挙げ，公式（命題）をつくってみる．その公式が正しいかどうかを根拠や性質を使って説明することを重視する．

今回は，マッチ棒を使って正方形をつくり，正方形を n 個つくったときに使うマッチ棒の数を n を使った式で表し説明する活動を行った．生徒に提示した問題は以下の通りである．



n=1　　n=2　　　n=3

n 個の正方形をつなげるときに必要なマッチ棒の数は何本になるかを説明しよう．



【図 4　HR の記述】

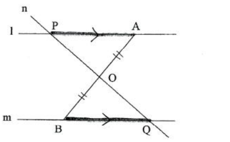
HR は，正方形が 1 つ増えるごとにマッチ棒は 3 本増えることを示し，(3n ＋ 1)本になることを説明している．その中で，n ＝ 0 は成り立たないことを示し，n ≧ 1 でいつでも正しいといえることを説明している．文字と式による説明の問題を挿入したことによって，公式（命題）がいつでも成り立つかどうかについて調べ，つくった公式が違っていれば，反例を示すことが必要であることを理解したといえる．また，公式の正しさを説明していく中で，その公式がいつでも成り立つと考える命題の理解に近づいたと考えられる．

(3) 第3段階（第18時）の活動と分析

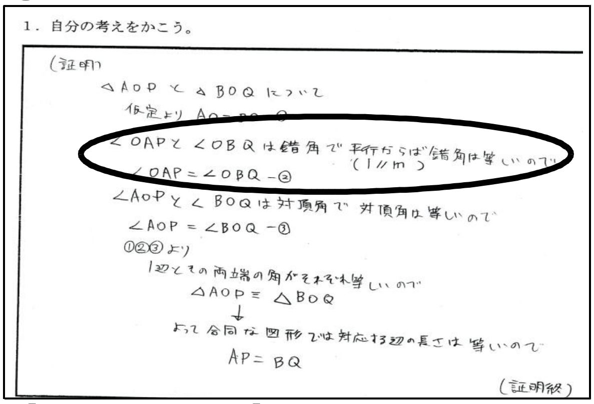
三角形の合同条件を用いて証明することを前時の学習を生かしながら進めることをさせた．生徒の提示した問題は以下の通りである．

問題

l//m として，l 上の点 A と m 上の点 B を結ぶ線分 AB の中点を O とする。点 O を通る直線 n が，l，m と交わる点をそれぞれ P,Q とするとき AP=BQ となることを証明しよう。



HR は∠ OAP と∠ OBQ は錯角で，平行（l//m）ならば錯角は等しいので∠ OAP=∠ OQB と書いている．特に記述中（図 5）にある〇印のように∠ OAP と∠ OQB は錯角の位置関係にあることをきちんと捉え，そして平行線の性質を示していることからも「～ならば…」と，命題として理解して演繹的な推論による証明活動を行っていることがより判断できる．



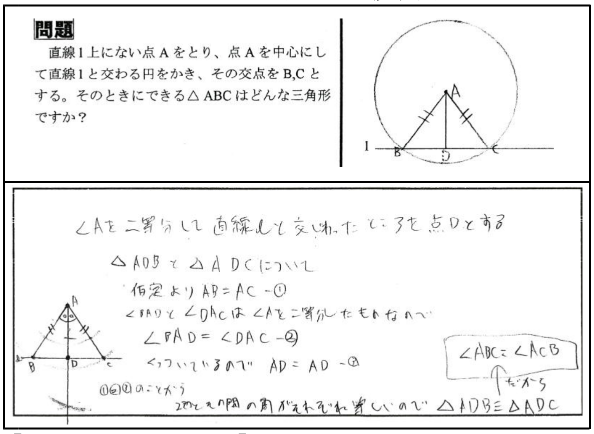
【図 5　HR の記述】

HR の記述から，第 1 段階，第 2 段階前半での性質の理解から性質間の関係の理解，そして命題として理解するまでという移行の入り口とはレベルが変わり，例えば「～ということ（がいえれば）…（ということ）が分かる」とか「～ならば…」と表現している．特に，HR の「∠ OAP と∠ OBQ は錯角で，平行（l//m）ならば錯角は等しいので，∠ OAP=∠ OQB 」については，「～ならば（いえればいつでも）…（といえる，が正しいといえる）」という命題として理解し，その上で演繹的な推論を進めていることが伺える．HR については第 3 段階の中で

も高いレベルの演繹な推論を行っていると判断できる．

(4) 第4段階 (第19時~第20時) の活動と分析

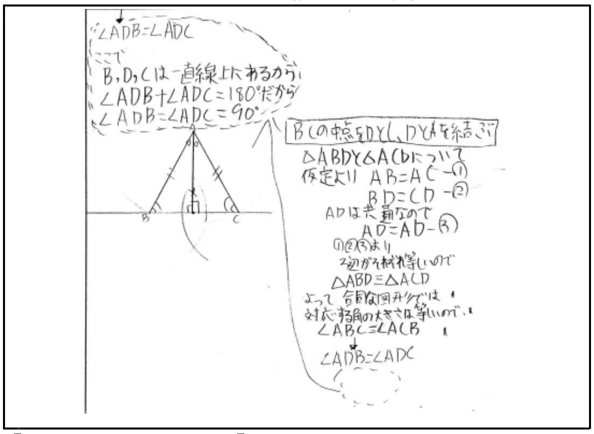
下の問題に従って，図をかき，そこにつくられた△ ABC はどんな三角形になるかを問い，ほとんどの生徒は，円の半径は等しいことから AB=AC より，二等辺三角形になることを示している．その中で，HR の変容をみるためワークシートの記述を検討する．



【図 6　HR の記述】

証明の書き出しに「∠ A を二等分して直線 l と交わったところを点 D とする」とし，角の二等分線により，∠ BAD ＝∠ CAD を示している．三角形の合同条件を導き，「だから」∠ ABC ＝∠ ACB と記述している．最後の，「合同な図形の性質である対応する角の大きさは等しいこと」の記述はないが，「だから」の中にその考えを取り入れて，命題としての理解を通して，演繹的な推論による証明を行っていることがわかる．

この証明を全体学習で確認した後，KT は次のように記述し，さまざまな証明方法があることを示している．(図 7 参照)



【図 7　KT の記述】

まずは，　　である． KT は全体学習を通して HR の記述にある「∠ A を二等分して直線 l と交わったところを点 D とする」の文言を付け加え，はじめにある証明を完成させた．その上で，　　を記述している．頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する様である．さらには，別方法の証明として，底辺の中点と点 A を結び，底角は等しいことを導き，　　を矢印によって共有している．

このことから，二等辺三角形ならば 2 つの底角は等しいことはいつでもいえると命題として理解し，演繹的な推論を基に示していることが伺える．

Ⅳ　研究の成果と今後の課題

日常にある門扉の開閉を基に，見た目や実験，実測から得られる図形の性質が，より高次である性質間の関係の理解としてとらえる段階を経て性質間の関係を理解し，命題として理解し始めるには，いつでも正しいといえる，いつでも成り立つと考えることができるという命題としてとらえる段階があることがとらえられた．特に，オランダ教科書から示唆を得て挿入したマッチ棒でつくった正方形 n 個のマッチ棒の数を n を使った式で表すことを通して，命題を意識的に構成し，その命題が正しいかどうかについて説明する活動がいつでも成り立つことへの理解となり，命題の理解が高まったと考えられる．その活動が，後の学習で生かされ演繹的な推論による証明活動を行ったといえることが明らかになった．

今後の課題としては，命題として理解したことが，演繹的な推論による証明活動を推進していくことはもちろん重要であるが，すべての生徒にとって，性質から命題への移行が促進され，演繹手な推論が積極的に行えるようになったわけではない．生徒自らが帰納的な推論には限界があることを本当の意味で理解し，それがいつでも正しいといえること，いえなければ反例を示すことが日常的に行えるような単元の再構成を行いたい．また，小学校算数科の中では，帰納的な推論や類推的な推論による説明は十分に行っているのかを検討し，小学校段階でも演繹的な推論を取り入れているような授業構想並びに小中の接続についても提案していきたい．

主要参考文献

小関熙純(1987)．*図形の論証指導*,明治図書．

文部科学省(2007,2008,2009)．国立教育政策研究所,*全国学力･学習状況調査,調査結果について.*

岡崎正和,高本誠二郎(2007)．教授学的状況論に基づく移動による図形の探求過程－図形の論証への接続を目指した教授実験の報告(その 2)－．*数学教育論文発表会論文集 40*,pp.427-432.

岡崎正和,高本誠二郎(2009)．図形の移動を通して培われる図形認識－論証への移行をめざしたデザイン実験－．*日本数学教育学会誌* 91(7),pp.2-11

Wim doekes(2005)．*Moderne wiskunde 3 vwo*．Wolters Noordhoff．pp.230-245