平成２２・２３年度　大学院派遣研修　研修報告（概要）

金沢大学大学院　教育学研究科　教育実践高度化専攻
石川県立金沢二水高等学校　教諭　弥久保　悦朗

研究主題：　高等学校数学科における数学的活動の研究
ー概念的数学化・応用的数学化を意識した対数単元の構成をもとにー

要約：　本研究は高等学校数学科における数学的活動を数学化の視点から検討し授業改善に資することを目的とする．特に，文系生徒に対して数学的活動を取り入れた授業の在り方について検討する．そのため，オランダ，フロイデンタール研究所のランゲの「概念的数学化」と「応用的数学化」を意識した単元構成のもとで対数分野の授業を実践し，その有効性について分析結果をもとに検証する．具体的には，対数単元における二つの数学化の実践について，高校で学ぶ数学の内容が得意な生徒と不得意な生徒のグループ間の差異に注目して分析し実践的成果を述べる．分析の結果，以下の知見を得ることができた．

・グループ間で対数概念の理解過程に若干の差が見られるが，概念的数学化を通して対数を学ぶことは両グループともに生徒の学びを促進し，概念的数学化の視点による単元構成が授業改善の方法の一つである．
・概念的数学化と応用的数学化をセットで単元構成し，生徒が一連の学びを経験することで，両グループともに対数概念の理解を深めることができる．

キーワード：　概念的数学化，応用的数学化，授業改善，対数

１．はじめにー研究の目的と方法ー

平成２４年度から実施される高等学校学習指導要領では，数学の学習において数学的活動を重視するよう求めている．そこで本研究は数学的活動を取り入れた高等学校数学科における授業改善の指針を得るとともに，実践的に研究することで具体的な授業改善の方法を提案することを目的とする．

そのために，先行研究における数学的活動に関する知見である数学化に注目し，特にオランダ，フロイデンタール研究所のランゲ(J.de Lange Jzn)の提唱する数学化に構想を得て研究をすすめることにする．

本稿では，文系で学ぶ生徒に対し実践した対数分野の単元構成と授業の概要を示し，結果分析を紹介する．これにより，高等学校数学教育における授業改善の一つの方法として数学化を取り入れた単元構成と，それを授業において実現する方法を提案する．

２．数学化を基本原理とした単元構想

オランダではランゲを中心に開発された文系高校生のための「数学 A」という科目がある．その特徴は，生徒が「概念的数学化」と「応用的数学化」の２つの数学化を「反省」を伴って学ぶことにある(J.de Lange 1987).

このうち，「概念的数学化」は，現実の意味ある場面を通して数学的知識・技能を習得する数学化を意味する．つまり，生徒が現実の状況や問題から出発し，生徒同士や教師との相互作用や反省を通して数学概念を獲得する活動である．一方の「応用的数学化」は獲得した概念や技能を補強し，問題解決の場面において数学をモデルとして現実の問題に当てはめ，調整をはかる活動である．さらにこの二つの数学化を行う上で「文脈」が３つの重要な役割を果たすとしている．それは概念の形成段階で数学への自然な動機づけを与える役割，数学的モデルの形成段階で正式な操

作を学ぶための役割，そして応用における役割である．

本研究ではランゲの二つの数学化をもとに単元構成を行う．つまり，「概念的数学化」と「応用的数学化」を一連の単元で行い，双方ともに生徒同士や教師との反省を伴う学びになるよう単元を構成する．

３．単元計画と実践の概要

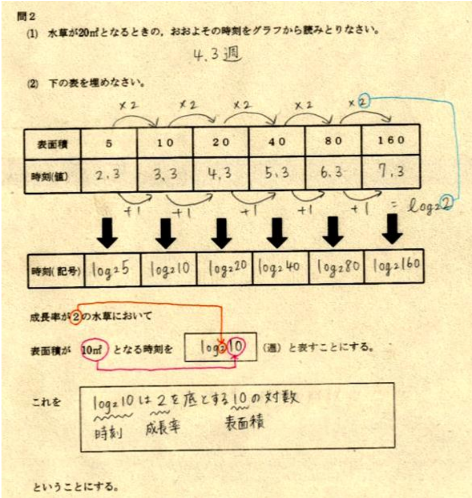
単元構成は，ランゲの数学化を具体化しているフロイデンタール研究所の”GROEI”（成長)や，オランダの文系高校生が学ぶ教科書を参考にし，対数を指数関数の逆関数として定義しその性質をもとに計算練習を展開する，現在の日本の教科書とは異なる授業構成を目指す．ただし，教科書の指導内容に漏れがないことや標準時間を超えないように配慮する．

実践は筆者の勤務校の第 2 学年文系クラスで行った．勤務校は全校生徒がおよそ 1000 人の県立学校で，ほぼ全員が大学進学を目指している．実践の全９時間のうち第１時から第４時を「概念的数学化」，第８時と第９時を「応用的数学化」と位置づけて行った．

表 1　授業実践の概要

時限．項目（内容）
１．対数を知る （対数概念を現実の問題から獲得する）
２．対数の性質① （現実の問題から和が積にまとまることを考察する）
３．対数の性質② （現実の問題から底の変換公式を考察する）
４．対数の性質のまとめ （現実と対比させながら対数の性質をまとめる）
５．対数関数のグラフ （対数関数のグラフとその性質を理解する）
６．大小比較と方程式・不等式 （対数の大小を関数を利用して比較する）
７．方程式・不等式と最大・最小 （対数関数を含む問題を解く）
８．常用対数とその利用 （常用対数表を用いて整数を見積もる）
９．対数計算の利用 （積を和に変換する性質を利用して地球を測る）

第 1 時は，現実場面を用いて対数を導入する．具体的には１週間で２倍の表面積に増える水草の成長場面をもとに対数概念を獲得する．生徒は現実場面を頼りに成り立つ事柄について反省を伴いながら見いだす．


問２

(1) 水草が20㎡となるときの，おおよその時刻をグラフから読みとりなさい。

4.3週

(2) 下の表を埋めなさい。

表面積	5	10	20	40	80	160
時刻(値)	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3	7.3
時刻(記号)	$\log_2 5$	$\log_2 10$	$\log_2 20$	$\log_2 40$	$\log_2 80$	$\log_2 160$

×2　×2　×2　×2　×2

+1　+1　+1　+1　+1　$= \log_2 2$

成長率が2の水草において

表面積が 10㎡ となる時刻を $\boxed{\log_2 10}$ (週) と表すことにする。

これを $\log_2 10$ は 2 を底とする 10 の対数
時刻　成長率　表面積

ということにする。

図 1　第１時のワークシート

第２時は，現実場面を参照しながら対数の性質を考える時間とする．具体的には水草の成長をもとに等式 $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ を見いだす活動を行う．その際，対数の等式や性質を保証するものが現実場面である．

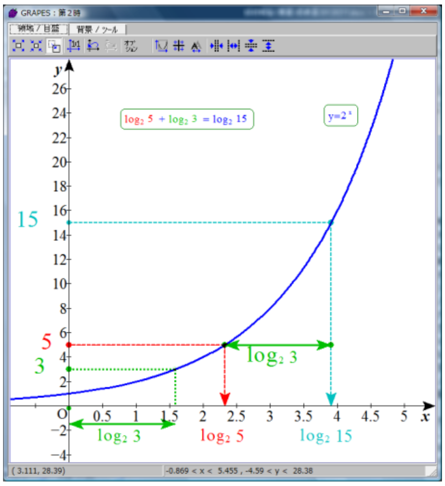


図 2　第 2 時の教師の説明図

第３時は，底の変換公式を１週間で２倍に成長する水草と，10 倍に成長する水草を比較して考える．対数概念の理解が進み具体物である水草から徐々に離れ，対数そのものの性質に興味・関心が向き始める時間である．

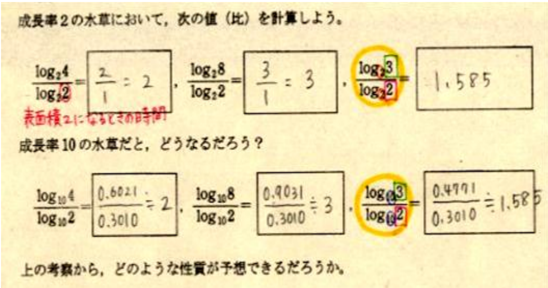


図 3　第 3 時のワークシート

第４時は，現実場面の参照から離れ対数の一般的な性質や仕組みを考える時間とした．本時は思考の対象が数学世界に移行している．

第５時から第７時は，対数関数のグラフの性質や対数方程式･不等式を解決するという，教科書に沿った時間である．ここでは，形式的な数学世界で知識を形成し，対数そのものを操作できる段階である．

第８時は，獲得した対数概念や性質を活用して対数概念の強化につなげる時間とし，数学世界への応用を行った．具体的には，常用対数表の活用により 2^{50} を 1.12×10^{15} と見積もる活動を通して対数概念の補強を目指した．

第９時は，現実世界の調整として，地球上の２地点の距離を大円における球面三角法を用いて求める際に，対数の性質や常用対数表を利用する活動を行った．対数を水草以外の現実問題に応用する段階である．

４．実践授業の分析の方法・結果

分析は「常時比較法」を用い，正規担当教諭が診立てた，数学の得意な生徒と不得意な生徒の二つのグループ間における理解過程の差異に注目する．分析の手順は筆者の設定した評価規準をもとに生徒の自己評価結果をグラフ化し傾向を掴んだ上で，各時間のワークシートの記述内容や状況を測るための数値基準を設け，全体やグループの傾向をみた．

第 1 時から第 4 時までの生徒の自己評価結果をグラフ化したものが図 4 である．両クラスとも肯定的自己評価「A,B」の割合が高いことが特徴として挙げられる．この傾向はグループごとの集計結果でも同様である．

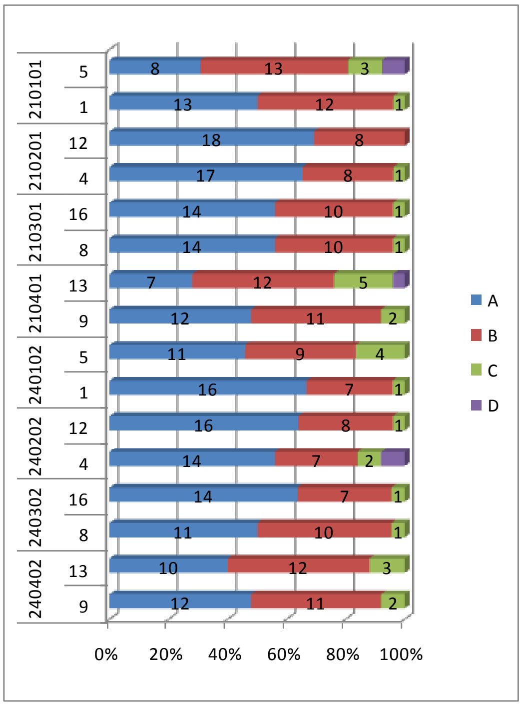


図 4　全体の自己評価

ワークシートへの記述内容の比較でも充実した記述が両クループに同程度見られ，不得意生徒は得意生徒に遜色なく対数概念獲得の活動を積極的に行っている（図 5，図 6）．

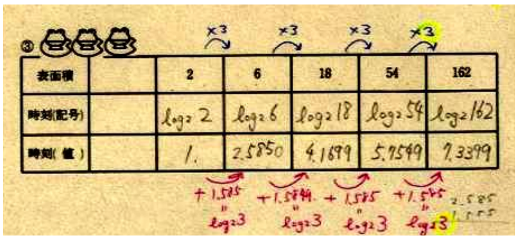


図 5　不得意生徒（第 1 時）

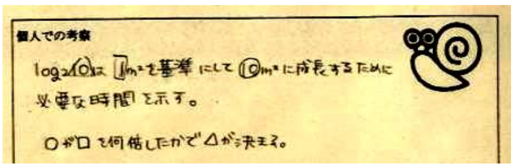


図 6　不得意生徒（第 1 時）

正規担当教諭による授業観察の感想では，現実場面を用いることで不得意生徒に通常の授業にはない積極的な学びが見られたと述べている．また，不得意生徒にとって現実世界が概念獲得を促進していることや，本実践後の微分・積分単元において生徒から概念的数学化を取り入れた授業構成を求める声があったこと，担当教諭自身も概念的数学化を今後の授業に取り入れたいと述べている（表 2）．

表 2　正規担当教諭の感想

①具体例から入ることで数学が苦手な生徒にとって取り組みやすく授業に参加していた。 ②いつもなら途中であきらめる生徒もついてきていた。 ③欠席しても次の授業に違和感なく参加できていた。 ④機械的に物事をやることが得意な傾向の生徒は苦手だったようだ。 ⑤以前に比べて宿題プリントの提出状況が良くなった。 ⑥次の微分法単元において微分や微分係数概念の意味づけを求める訴えが多くみられた。 ⑦今回の実践を見ていて，このような実践を今後の授業に取り入れる必要性は感じている。

次に授業実践の約２カ月後に各グループから３人ずつ抽出し個別インタビューを行った．

第１時では，考えやすかったと答えた生徒が不得意グループで３人中２人，得意グループで１人であり逆の割合になっている．また，概念的数学化の４時間全体の感想では，得意グループの生徒に特徴的な回答が見られた．それは，単元すべてを経験したのちに，水草を用いて学び始めた理由が分かってきたと述べていることである（表 3）．

表 3　生徒インタビュー　全体の印象

不得意グループ			得意グループ		
(08)	(19)	(29)	(15)	(32)	(37)
数学で効率よく得点するには，公式を覚えてそれをいかにうまく使いこなすかが重要なので，いつも通りの公式を説明して練習問題をこなす授業の方が良かった。	小学校のときの授業みたいでとてもよかった。自分でも意外なことだったのだが，（正規担当教論の）プリントがいつもより少ない時間でやり終えることができた。	公式が証明されれば，しぶしぶそれを納得して使うが，水草があったことですんなりついて行くことができよかった。	4時間目のまとめからいきなりスタートする方法では，わかりにくかったと思う。水草はあってよかった。	問題に取り組み始めたときに，水草を使ってやってきたことがようやく意識できた。後であらためて考えると水草の言っていることが良く分かり見えてきた。	最初の4時間の中では戸惑ったが，試験前に振り返った時に水草の意味がわかってきた。

以上からグループ間で概念的数学化による学びよさに際立った差がなく，また二つの数学化をセットで経験することが対数概念の理解を深めていることが分かる．

５．議論

現在の日本の高等学校数学科の授業は，生徒を文系，理系にコース分けしているが，ほぼ同じ内容を同じ順序で構成している．それに対し概念的数学化による授業は，現実場面を参照しながら概念を獲得するという異なるアプローチを採ることで得意生徒に若干の戸惑いを与えるものの，不得意生徒の学びを促進する点に価値があると言える．また，二つの数学化をセットで経験することが生徒の対数概念理解に有効に作用することが分かった．したがって二つの数学化の視点で単元を構成することが授業改善につながる．

６．まとめと今後の課題

本実践では二つの数学化を意識した授業を構成し，生徒からは一定の評価を得たが，より相乗効果があがるように単元構成を再提案することが可能である．また，二つの数学化におけるそれぞれの数学的活動は同じものを２回繰り返すのではなく，主客が逆転する関係があることもわかった．つまり，概念的数学化では生徒が導かれながら活動するが，応用的数学化は生徒主体の活動という違いである．授業者や単元を組み立てる側として，主客の切り替えが起こる場面をどのように設定するかが鍵であり更なる検討を要する．

したがって今後は，「二つの数学化が相乗効果をもたらす単元構成のための改善点」の研究に取り組みたい．

引用・参考文献

Dijksterhuis, J. F.(2004).*Moderne wiskunde wiskunde-A1(B1) Deel-2*. Wolters Noordhoff.

Lange Jzn, J. de (1987). *Mathematics,insight and meaning*. OW&OC. Utrecht.

Lange Jzn,J.de&Kindt,M.(1984).*Groei*.OW&OC. http://digbijzcoll.library.uu.nl/lees_gfx.php?lang=nl&W=On&BoekID=1244.

LeCompte,M.D. & Preissle,J.(1993). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Academic Press.